

UNIwersytet Gdański
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Instytut Matematyki

Pierwiastki
w grupie klas odwzorowań powierzchni
nieorientowalnej

Imię i nazwisko autora:	Anna Parlak
Nr albumu:	198232
Kierunek studiów:	matematyka
Specjalność:	teoretyczna

Praca magisterska napisana pod kierunkiem
dr Michała Stukowa

Gdańsk 2017

OŚWIADCZENIE

Ja, niżej podpisana, oświadczam, że przedłożona praca dyplomowa została wykonana przeze mnie samodzielnie, nie narusza praw autorskich, interesów prawnych i materialnych innych osób.

Podpis:

Data:

Spis treści

Wstęp	1
1 Powierzchnie	5
1.1 Wprowadzenie	5
1.2 Okręgi i łuki na powierzchniach	7
1.2.1 Rozcinanie powierzchni wzdłuż okręgów	9
1.3 Grupa podstawowa i pierwsza grupa homologii powierzchni	11
1.4 Przestrzenie nakrywające powierzchnie	15
2 Grupy klas odwzorowań powierzchni	26
2.1 Definicja i Problem Realizacji Nielsena	26
2.2 Grupa klas odwzorowań podpowierzchni i metoda Alexandera	27
2.3 Skręcenia Dehna	30
2.4 Generatory grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej	38
2.4.1 Relacje w $\mathcal{M}(N_g)$	40
2.5 Reprezentacje ortogonalne $\mathcal{M}(N_g)$	42
2.5.1 Nieparzystość pierwiastka ze skręcenia Dehna	44
3 Orbifoldy dwuwymiarowe	47
3.1 Definicja i przykłady	47
3.2 Grupa podstawowa orbifoldu	54
3.2.1 Grupa podstawowa orbifoldu jako grupa klas homotopii pętli	57
3.3 Orbifoldowa charakterystyka Eulera	67
3.4 Rozgałęzione nakrycia sfery, dysku i pierścienia	73
4 Pierwiastki ze skręceń Dehna w $\mathcal{M}(N_g)$	81
4.1 Warunki na istnienie pierwiastka stopnia n	82

4.2	Pierwiastki maksymalnego stopnia	92
5	Pierwiastki proste	103
5.1	Warunki na istnienie pierwiastka prostego stopnia n	103
5.2	Konstrukcja geometryczna	108
5.2.1	Pierwiastki ze skręceń typu A – przykłady	108
5.2.2	Pierwiastki ze skręceń typu B – przykłady	117
5.2.3	Tabele wzorów na pierwiastki	122
	Spis rysunków	124
	Spis tabel	126
	Lista oznaczeń używanych w pracy	127

Wstęp

Niech X będzie zwartą i spójną powierzchnią topologiczną ze zbiorem Σ wyróżnionych punktów z wnętrza X (tzw. nakłuc). Przez $\mathcal{M}(X)$ oznaczamy grupę klas izotopii homeomorfizmów X zachowujących Σ i działających trywialnie na brzegu ∂X , przy czym gdy X jest orientowalna, ograniczamy się wyłącznie do homeomorfizmów zachowujących orientację. $\mathcal{M}(X)$ nazywamy *grupą klas odwzorowań powierzchni X* . Zamkniętą powierzchnią orientowalną rodzaju g oznaczamy przez S_g , zaś zamkniętą powierzchnią nieorientowalną rodzaju g — przez N_g .

Grupy klas odwzorowań są centralnymi obiektami niskowymiarowej topologii, zatem ich struktura algebraiczna jest przedmiotem intensywnych badań mających niemal stuletnią historię, rozpoczynającą się od prac Maxa Dehna [13] i Jakoba Nielsena [50, 51, 52]. Rzeczywisty rozwój tej tematyki rozpoczął się jednak pod koniec lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku od prac Lickorisha [40, 42, 41]. Prace te pokazały, że algebraiczne własności grup klas odwzorowań mają niezwykle ważne konsekwencje w teorii 3-rozmaitości i 4-rozmaitości, co spowodowało, że badanie ich nabrało większego tempa. W latach siedemdziesiątych duży wkład w rozwój teorii grup klas odwzorowań miała Joan Birman [2, 3, 4, 5, 6], która między innymi opisała związek grup klas odwzorowań z grupami warkoczy. Później grupy klas odwzorowań stały się bardziej popularnym tematem, rozwijanym przez szereg matematyków takich jak Dennis Johnson [33, 34, 32, 35], Nikolai Ivanov [31, 18], John Harer [25, 26, 27, 28] czy Bronisław Wajnryb [69, 68, 70].

W odróżnieniu od przypadku powierzchni orientowalnych, grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnych ciągle są stosunkowo mało poznanymi obiektami. Wiadomo, że są one podgrupami nieskończonego indeksu grup klas odwzorowań powierzchni orientowalnych będących ich podwójnym nakryciem. Stąd niektóre własności grup klas odwzorowań powierzchni orientowalnych automatycznie przenoszą się na przypadek powierzchni nieorientowalnych. Jednak nieskończoność indeksu jest poważną przeszkodą, dlatego tą metodą nie uzyskano jak dotąd głębokich wyników. Ponadto większość ważnych rezultatów dotyczących grup klas odwzorowań w fundamentalny sposób wykorzystuje orientowalność. Tym samym prosta adaptacja do przypadku nieorientowalnego nie jest możliwa i badanie grup klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnych wymaga korzystania z nowych metod.

Dehn [13] (a później, niezależnie od niego, Lickorish [42]) udowodnił, że $\mathcal{M}(S_g)$ jest generowana przez skończoną liczbę elementów zwanych *skręceniami Dehna*. Z tego powodu rozmaite własności tych odwzorowań, jak na przykład relacje zachodzące między nimi, są niezwykle istotne w badaniach grup klas odwzorowań. Wiele z nich — na przykład relacja

łańcucha — jest kluczowych dla wyników przedstawionych w niniejszej pracy.

W przypadku nieorientowalnym Lickorish [41] udowodnił, że skręcenia Dehna generują w $\mathcal{M}(N_g)$ podgrupę indeksu 2, natomiast cała grupa $\mathcal{M}(N_g)$ jest generowana przez skręcenia Dehna i jeden Y -homeomorfizm występujący w literaturze również pod nazwą *ślizgu wstęgi Möbiusa* (ang. *crosscap slide*). Później zamiast Y -homeomorfizmu w zbiorze generującym $\mathcal{M}(N_g)$ zaczęto używać *transpozycji wstęg Möbiusa* (ang. *crosscap transposition*). W szczególności odwzorowania te są wykorzystane jako generatory $\mathcal{M}(N_g)$ w fundamentalnej pracy Parisa i Szepietowskiego [55], w której otrzymali oni pełne przedstawienie $\mathcal{M}(N_g)$. Ponadto Leśniak i Szepietowski [39] udowodnili, że grupa klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_g)$ zwartej powierzchni nieorientowalnej rodzaju $g \geq 7$ jest generowana przez elementy, które są sprzężone z jedną transpozycją wstęg Möbiusa lub transpozycją do niej odwrotną.

W 2009 roku została opublikowana zaskakująca praca Margalita i Schleimera [45], w której przedstawili geometryczną konstrukcję pierwiastka stopnia $2g + 1$ ze skręcenia Dehna względem nierozdzielającego okręgu w $\mathcal{M}(S_{g+1})$, $g \geq 1$. W naturalny sposób zrodziło to pytanie czy istnieją pierwiastki innych stopni oraz czy możliwy jest ich opis i klasyfikacja. Korzystając z teorii działań grup skończonych na powierzchniach [66, Rozdział 13], McCullough i Rajeevsarathy [46] wyprowadzili warunki konieczne i dostateczne na istnienie pierwiastka stopnia n ze skręcenia Dehna względem okręgu nierozdzielającego w $\mathcal{M}(S_{g+1})$. Udowodnili ponadto, że pierwiastki skonstruowane przez Schleimera i Margalita [45] mają maksymalny stopień. Zwróćmy uwagę na interesujący fakt, że możliwe jest wyciąganie wniosków o pierwiastkach ze skręceń Dehna w $\mathcal{M}(S_{g+1})$, które są elementami nieskończonego rzędu, wykorzystując wyłącznie wiedzę o działaniu elementów skończonego rzędu w $\text{Homeo}(S_g)$.

Podobne badania były przeprowadzane niezależnie przez Mondena [47]. W późniejszych latach Rajeevsarathy badał pierwiastki ze skręceń Dehna względem okręgów rozdzielających [60], sumy wielu okręgów [62], a także pierwiastki z nietrywialnych potęg skręceń Dehna [61].

Wspólnie z dr Michałem Stukowem podjęliśmy się zadania rozszerzenia wiedzy o pierwiastkach z generatorów grup klas odwzorowań na przypadek nieorientowalny. W pracy [56] w grupie klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_{g+2})$ powierzchni nieorientowalnej rodzaju $g + 2$ skonstruowaliśmy pierwiastki stopnia g (gdy $g \geq 3$ jest nieparzyste) i $g - 1$ (gdy $g \geq 4$ jest parzyste) z transpozycji wstęg Möbiusa i ślizgów wstęg Möbiusa, których dopełnienie nośnika jest powierzchnią nieorientowalną $N_{g,1}$. W przypadku parzystego $g \geq 2$ skonstruowaliśmy pierwiastki stopnia $g + 1$ z transpozycji i ślizgów, których dopełnienie nośnika jest powierzchnią orientowalną $S_{\frac{g}{2},1}$. Udowodniliśmy również, że w pozostałych przypadkach pierwiastki z transpozycji i ślizgów nie istnieją. Celem niniejszej pracy jest szczegółowe przedstawienie wyników, wypracowanych przeze mnie wspólnie z dr Michałem Stukowem, dotyczących pierwiastków ze skręceń Dehna względem okręgów nierozdzielających w grupie klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_{g+2})$. Wyniki te są nowe i jak dotąd nieopublikowane. W skróconej wersji, bez przywoływania elementarnych pojęć i twierdzeń związanych z powierzchniami i orbifoldami, zostały przedstawione w artykule [57], który obecnie jest w fazie redakcji.

Praca została podzielona na pięć rozdziałów, z których pierwsze trzy mają charakter

przygotowawczy — przytaczamy w nich i skrótowo wyjaśniamy wszystkie fakty i własności, z których korzystamy w głównej części pracy. Pierwszy rozdział poświęcony jest powierzchniom oraz podstawowym pojęciom topologii algebraicznej, takim jak grupa podstawowa czy nakrycie. Dowodzimy kilku standardowych wyników z teorii nakryć — między innymi pokazujemy, że jeżeli X jest powierzchnią, a G jest grupą działającą na X w sposób wolny i właściwie dyskretny, to przestrzeń orbit X/G jest powierzchnią, a kanoniczne rzutowanie $p : X \rightarrow X/G$ jest nakryciem.

Kolejny rozdział zawiera informacje z zakresu teorii grup klas odwzorowań powierzchni. W szczególności opisujemy generatory grup klas odwzorowań i relacje między nimi, które okażą się istotne w rozdziale piątym. Jednym z oryginalnych wyników przedstawionych w tej pracy jest dowód relacji trójkębu (Fakt 2.3.19), będącej wspólnym uogólnieniem wcześniej znanych relacji gwiazdy i relacji łańcucha. Opisujemy również pokrótce działanie grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_g)$ na pierwszej grupie homologii $H_1(N_g; \mathbb{Z})$. Elementy grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_g)$ indukują automorfizmy pierwszej grupy homologii $H_1(N_g; \mathbb{Z})$, więc niektórych własności generatorów $\mathcal{M}(N_g)$ można stosunkowo łatwo dowieść, wykorzystując własności indukowanych przez nie macierzy. Metoda ta jest pomocna między innymi przy ustaleniu (nie)parzystości stopni pierwiastków ze skręceń Dehna względem okręgów nierozdzielających (Fakt 2.5.7).

Rozdział trzeci ma na celu przybliżenie teorii orbifoldów. Orbifolds mogą być traktowane jako uogólnienie pojęcia rozmaitości, ponieważ wiele z nich jest postaci M/G , gdzie M jest rozmaitością, zaś G grupą działającą na M w sposób właściwie dyskretny, ale niekoniecznie wolny. Zauważmy, że jeżeli t jest homeomorfizmem powierzchni X rzędu n w grupie $\text{Homeo}(X)$, to $X/\langle t \rangle$ jest orbifoldem. W kontekście szukania pierwiastków ze skręceń Dehna jest to istotne ze względu na to, że każdemu pierwiastkowi stopnia n ze skręcenia Dehna względem okręgu nierozdzielającego w $\mathcal{M}(N_{g+2})$ można przyporządkować homeomorfizm $t : N_g \rightarrow N_g$ rzędu n i badać działanie tego homeomorfizmu przez badanie orbifoldu $N_g/\langle t \rangle$. Przykładowo z prezentacji orbifoldowej grupy podstawowej $\pi_1^{\text{orb}}(N_g/\langle t \rangle)$ i własności jej generatorów można wyprowadzić jeden z warunków koniecznych istnienia pierwiastka stopnia n ze skręcenia Dehna w grupie klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_{g+2})$.

Główne wyniki tej pracy zostały przedstawione w rozdziale czwartym. Wprowadzamy w nim pojęcie *sygnatury pierwiastka stopnia n* , która koduje działanie homeomorfizmu t rzędu n na powierzchni N_g indukowanego przez pierwiastek h stopnia n ze skręcenia Dehna względem nierozdzielającego okręgu w $\mathcal{M}(N_{g+2})$. Jedynymi punktami osobliwymi orbifoldu $N_g/\langle t \rangle$ są punkty stożkowe (brak punktów narożnych czy lustrzanych brzegów). Sygnatura pierwiastka h zawiera między innymi informacje o rodzaju topologicznym przestrzeni orbit, stopniach punktów stożkowych oraz kątach obrotu przy działaniu t na N_g wokół przeciwobrazów każdego z punktów stożkowych.

W zbiorze sygnatur stopnia n definiujemy relację równoważności, a następnie dowodzimy twierdzenia, które ustala wzajemną odpowiedniość między klasami sprzężoności pierwiastków stopnia n ze skręceń Dehna względem okręgów nierozdzielających w $\mathcal{M}(N_{g+2})$ a klasami równoważności sygnatur stopnia n (Twierdzenie 4.1.1). Otrzymane numeryczne kryteria warunkujące istnienie pierwiastka stopnia n wykorzystujemy do wyznaczenia górnego i dolnego

oszacowania na maksymalny stopień pierwiastka ze skręcenia Dehna w $\mathcal{M}(N_{g+2})$ (Twierdzenie 4.2.1, Twierdzenie 4.2.3).

Wśród wszystkich pierwiastków wyróżniamy klasę pierwiastków prostych (ang. *primary*). Pierwiastki te można w łatwy sposób konstruować, korzystając z relacji łańcucha i trójzębu. W ostatnim rozdziale pracy dowodzimy, kiedy takie pierwiastki istnieją (Twierdzenie 5.1.2, Twierdzenie 5.1.3), a także przedstawiamy jawne wzory na niektóre z nich oraz odpowiadające im sygnatury dla dowolnego stopnia n (Tabela 5.3, Tabela 5.4). Konsekwencją konstrukcji i głównego twierdzenia jest przedstawienie naturalnego obrotu o kąt $\frac{2\pi}{g}$ na powierzchni nieorientowalnej N_g , gdy g jest nieparzysta, jako złożenia skręceń Dehna (Wniosek 5.2.5).

Chciałabym podziękować doktorowi Michałowi Stukowowi za pomoc w przygotowaniu tej pracy, poświęcony czas oraz wsparcie naukowe na przestrzeni ostatnich dwóch lat. Za pomoc udzieloną w rozmaitych sprawach formalnych dziękuję także profesorowi Grzegorzowi Gromadzkiemu.

Rozdział 1

Powierzchnie

1.1 Wprowadzenie

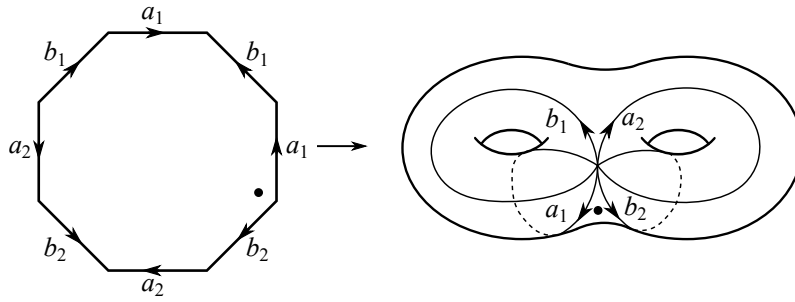
Powierzchnią z brzegiem nazywamy rozmaitość dwuwymiarową z brzegiem, to znaczy przestrzeń topologiczną Hausdorffa, która spełnia drugi aksjomat przeliczalności oraz każdy jej punkt posiada otwarte otoczenie homeomorficzne z dwuwymiarową przestrzenią euklidesową \mathbb{R}^2 lub górną półpłaszczyzną $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

Zgodnie z twierdzeniem o klasyfikacji powierzchni [22] każda zamknięta (tzn. zwarta, bez brzegu) spójna, orientowalna powierzchnia jest homeomorficzna z sumą spójną sfery dwuwymiarowej i $g \geq 0$ torusów oraz każdą zwartą, spójną, orientowalną powierzchnię można otrzymać ze spójnej, orientowalnej powierzchni zamkniętej poprzez usunięcie wewnątrz $n \geq 0$ parami rozłącznych domkniętych dysków. Każda zamknięta, spójna, nieorientowalna powierzchnia jest homeomorficzna z sumą spójną $g \geq 1$ płaszczyzn rzutowych oraz każdą zwartą, spójną, nieorientowalną powierzchnię można otrzymać ze spójnej, nieorientowalnej powierzchni zamkniętej poprzez usunięcie wewnątrz $n \geq 0$ parami rozłącznych domkniętych dysków.

Liczbę naturalną g nazywamy *rodzajem* powierzchni, n jest natomiast liczbą składowych brzegu. Z powierzchni zwartej X w łatwy sposób można otrzymać powierzchnię, która nie jest zwarta, poprzez usunięcie k punktów z wnętrza X . Mówimy wówczas, że powierzchnia ma k *nakłuc*.

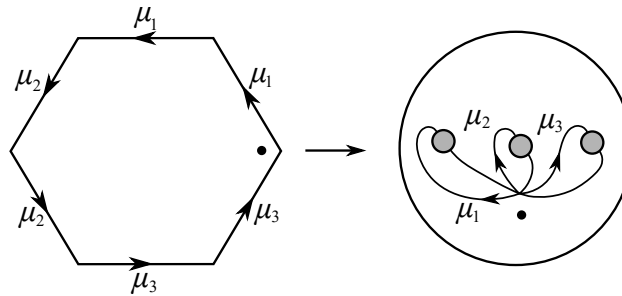
Będziemy stosować oznaczeń $S_{g,n}^k, N_{g,n}^k$ odpowiednio na powierzchnię orientowalną rodzaju g z n składowymi brzegami oraz k nakłuciami oraz powierzchnię nieorientowalną rodzaju g z n składowymi brzegami oraz k nakłuciami. W przypadku gdy $n = 0$ i/lub $k = 0$, będziemy te indeksy pomijać. Niekiedy będziemy także używać oznaczeń S i N na powierzchnię orientowalną i nieorientowalną odpowiednio, jeśli nie będziemy chcieli podkreślać jej rodzaju.

Jednym ze sposobów konstrukcji powierzchni S_g jest utożsamienie parami krawędzi $4g$ -kąta foremnego zgodnie ze wzorem $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$, gdzie a_i, b_i oznaczają kolejne krawędzie $4g$ -kąta, a potęgi ± 1 ich orientacje. Po utożsamieniu krawędzie wielokąta stają się sumą $2g$ okręgów na powierzchni przecinających się w jednym punkcie (Przykład $g = 2$ został przedstawiony na Rysunku 1.1). Możemy o tym myśleć w ten sposób, że konstrukcję powierzchni



Rysunek 1.1: Ośmiokąt foremny jako model S_2 .

zaczynamy od jednego punktu (komórki 0-wymiarowej), do którego przyklejamy $2g$ okręgów (komórek 1-wymiarowych), a następnie do nich przyklejamy wewnątrz wielokąta, homeomorficzne z otwartym dyskiem (komórkę 2-wymiarową) [29, str. 5]. W podobny sposób można skonstruować powierzchnie nieorientowalne N_g – w tym przypadku utożsamiamy krawędzie $2g$ -kąta foremnego zgodnie ze wzorem $\mu_1^2 \mu_2^2 \dots \mu_g^2$, otrzymując powierzchnię z g okręgami przecinającymi się w jednym punkcie (Rysunek 1.2).



Rysunek 1.2: Sześciokąt foremny jako model N_3 . Zaciemnienie dysku oznacza, że jego wnętrze jest usunięte i w powstałej w ten sposób składowej brzegu utożsamiamy punkty antypodyczne. Reprezentuje to wklejoną wstęgę Möbiusa.

Uwaga 1.1.1. W dalszych częściach pracy zaciemnione dyski zawsze będą oznaczały, że ich wnętrza zostały usunięte, a w każdej tak powstałej składowej brzegu utożsamiamy punkty antypodyczne. Jest to równoważne z wklejeniem wstęgi Möbiusa.

Taki sposób myślenia o powierzchniach nadaje im strukturę *CW-kompleksu* (formalną definicję *CW-kompleksu* można znaleźć na przykład w [15, tom II, str. 36]). Daje to możliwość łatwego obliczenia jej charakterystyki Eulera, a także upraszcza obliczenia grup homologii. W dalszych częściach pracy będziemy zakładali, że powierzchnie reprezentowane są wyżej opisanymi *CW-kompleksami*, które będziemy nazywać *standardowymi CW-kompleksami* powierzchni.

Definicja 1.1.2. *Charakterystyka Eulera* dowolnego n -wymiarowego *CW-kompleksu* X zdefiniowana jest jako:

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i |c_i|, \quad (1.1)$$

gdzie $|c_i|$ oznacza liczbę komórek i -wymiarowych w X [29, str. 146].

Charakterystykę Eulera można równoważnie zdefiniować jako alternującą sumę rang kolejnych grup homologii (liczb Bettięgo) przestrzeni X , zatem jest ona niezmiennikiem homotopijnym [29, Twierdzenie 2.44]. W szczególności oznacza to, że nie zależy od wyboru struktury CW -kompleksu na X oraz możemy zakładać, że wprowadzanie nowych składowych brzegu zachodzi przez wycinanie (otwartych) dysków, których brzeg nie jest rozłączny z jedynym wierzchołkiem standardowego CW -kompleksu.

Fakt 1.1.3. *Charakterystyka Eulera powierzchni $S_{g,n}^k$ i $N_{g,n}^k$ wynosi odpowiednio*

$$\chi(S_{g,n}^k) = 2 - 2g - n - k, \quad (1.2)$$

$$\chi(N_{g,n}^k) = 2 - g - n - k. \quad (1.3)$$

Dowód. W przypadku powierzchni wzór (1.1) przyjmuje postać

$$\chi(X) = |c_0| - |c_1| + |c_2| = v - e + f,$$

gdzie $v = |c_0|$ oznacza liczbę wierzchołków, $e = |c_1|$ – liczbę krawędzi a $f = |c_2|$ – liczbę ścian w odpowiednim CW -kompleksie. Korzystając ze standardowej struktury CW -kompleksu na S_g i N_g , otrzymujemy

$$\chi(S_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g,$$

$$\chi(N_g) = 1 - g + 1 = 2 - g.$$

Wycięcie z zamkniętej powierzchni n dysków powoduje, że w odpowiadającym jej CW -kompleksie wzrasta o n liczba krawędzi, natomiast nie zmienia się liczba ścian ani wierzchołków. Stąd

$$\chi(S_{g,n}) = 1 - (2g + n) + 1 = 2 - 2g - n,$$

$$\chi(N_{g,n}) = 1 - (g + n) + 1 = 2 - g - n.$$

Ponieważ nakłucia są homotopijnie równoważne ze składowymi brzegu (choć nie topologicznie równoważne), oznacza to, że każde z nich również zmniejsza charakterystykę Eulera o jeden. \square

1.2 Okręgi i łuki na powierzchniach

Definicja 1.2.1. Krzywą zamkniętą na powierzchni X nazywamy obraz ciągłego odwzorowania $S^1 \rightarrow X$. Krzywa zamknięta nie ma samoprzecięć, jeżeli $S^1 \rightarrow X$ jest odwzorowaniem różnowartościowym.

Wzdłuż krzywych zamkniętych bez samoprzecięć można rozcinać powierzchnie, otrzymując

potencjalnie prostsze do badania podpowierzchnie, a jednocześnie nie tracąc wielu informacji o topologii początkowej powierzchni. Krzywą zamkniętą bez samoprzecięć na X nazywamy *istotną* (ang. *essential*), jeżeli nie jest homotopijna z punktem, nakłuciem ani składową brzegu powierzchni X oraz *generyczną* (ang. *generic*), jeżeli jest istotna oraz nie ogranicza wstęgi Möbiusa na X . Ponieważ krzywe zamknięte bez samoprzecięć są homeomorficzne z okręgiem, w dalszej części pracy często będą określane mianem *okręgów na powierzchni*. Ponadto podkreślamy, że o ile wyraźnie nie zaznaczono inaczej, rozważamy okręgi **niezorientowane**.

Definicja 1.2.2. *Otoczeniem regularnym* okręgu a na powierzchni X nazywamy włożenie w tę powierzchnię pierścienia (powierzchni bocznej walca) lub wstęgi Möbiusa w taki sposób, aby był obrazem rdzenia. Okrąg na powierzchni nazywamy: *dwustronnym* (ang. *two-sided*), jeżeli jego otoczenie regularne jest homeomorficzne z pierścieniem (powierzchnią boczną walca), zaś *jednostronnym* (ang. *one-sided*), jeżeli jego otoczenia regularne jest homeomorficzne ze wstęgą Möbiusa. Okręgi jednostronne występują wyłącznie na powierzchniach nieorientowalnych.

Definicja 1.2.3. Mówimy, że odwzorowania ciągłe $f, g : X \rightarrow Y$ są *homotopijne*, o ile istnieje rodzina odwzorowań ciągłych $h_t : X \rightarrow Y$ taka, że

1. $\forall_{x \in X} h_0(x) = f(x)$,
2. $\forall_{x \in X} h_1(x) = g(x)$,
3. odwzorowanie $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ dane wzorem $H(s, t) = h_t(s)$ jest ciągłe.

Rodzinę $\{h_t\}_{t \in [0, 1]}$ nazywamy *homotopią* między odwzorowaniami f i g .

Definicja 1.2.4. Mówimy, że zanurzenia $f, g : X \rightarrow Y$ są *izotopijne*, o ile istnieje rodzina odwzorowań ciągłych $h_t : X \rightarrow Y$ taka, że

1. $\forall_{x \in X} h_0(x) = f(x)$,
2. $\forall_{x \in X} h_1(x) = g(x)$,
3. dla każdego $t \in [0, 1]$ odwzorowanie h_t jest zanurzeniem.

Rodzinę $\{h_t\}_{t \in [0, 1]}$ nazywamy *izotopią* między odwzorowaniami f i g .

W szczególności dwa okręgi a, b są *izotopijne*, jeżeli istnieje homotopia $h_t : S^1 \rightarrow X$ między a i b taka, że dla każdego $t \in [0, 1]$ krzywa zamknięta $h_t(S^1)$ nie ma samoprzecięć. Ponieważ na powierzchniach dwa homotopijne okręgi są izotopijne [19, Stwierdzenie 1.10], równoważnie możemy rozważać klasy homotopii lub klasy izotopii okręgów.

Definicja 1.2.5. Geometrycznym indeksem przecięcia między klasami izotopii okręgów a, b na powierzchni X nazywamy minimalną liczbę punktów przecięcia między reprezentantem klasy izotopii a i reprezentantem klasy izotopii b

$$i(a, b) = \min\{|\alpha \cap \beta| : \alpha \in a, \beta \in b\}.$$

Definicja 1.2.6. Ciąg klas izotopii okręgów c_1, \dots, c_k na powierzchni X nazywamy *łańcuchem*, jeżeli $i(c_i, c_{i+1}) = 1$ dla $1 \leq i \leq k$ oraz $i(c_i, c_j) = 0$ dla $|i - j| > 1$.

Definicja 1.2.7. Mówimy, że okręgi a, b są w *położeniu minimalnym*, gdy $|a \cap b| = i(a, b)$, tzn. przecinają się tyle razy, ile wynosi geometryczny indeks przecięcia ich klas izotopii.

W dalszej części pracy zwykle nie odróżniamy okręgu od jego klasy izotopii/homotopii.

Definicja 1.2.8. *Łukiem* α na powierzchni X nazywamy obraz zanurzenia $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$. Jego brzeg $\partial\alpha$ składa się z końców $\alpha(0), \alpha(1)$. Mówimy, że łuk α jest *właściwie zanurzony* (ang. *properly embedded*), jeżeli $\alpha \cap \partial X = \partial\alpha$. Mówimy, że łuk α jest *istotny* (ang. *essential*), jeżeli na powierzchni X nie istnieje podpowierzchnia homeomorficzna z dyskiem, której brzeg jest równy sumie łuku α z pewnym łukiem zawartym w brzegu ∂X .

1.2.1 Rozcinanie powierzchni wzdłuż okręgów

Niech a będzie okręgiem dwustronnym na zwartej powierzchni X . Przez $X \setminus a$ oznaczmy zwartą przestrzeń powstałą przez rozcięcie powierzchni X wzdłuż a . Para (X, a) jest lokalnie homeomorficzna z $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, zatem $X \setminus a$ jest powierzchnią z dwiema dodatkowymi (względem X) składowymi brzegu a_1, a_2 . Ponadto istnieje homeomorfizm $h : a_1 \rightarrow a_2$, taki że przestrzeń ilorazowa $X \setminus a / (x \sim h(x))$ jest homeomorficzna z X oraz jeżeli $p : X \setminus a \rightarrow X$ jest rzutowaniem kanonicznym, to $p(a_1) = p(a_2) = a$ [19, str. 38].

Definicja 1.2.9. Okrąg a na powierzchni X nazywamy *nierozdzielającym*, jeżeli powierzchnia $X \setminus a$ jest spójna. Jeżeli $X \setminus a$ nie jest spójna, to a nazywamy okręgiem *rozdzielającym*.

Fakt 1.2.10. *Jeżeli a jest okręgiem nierozdzielającym na powierzchni X , to $\chi(X \setminus a) = \chi(X)$. Jeżeli a jest okręgiem rozdzielającym, to $X \setminus a$ składa się z dwóch rozłącznych powierzchni X_1, X_2 oraz $\chi(X_1) + \chi(X_2) = \chi(X)$.*

Dowód. Zauważmy, że jeżeli b jest składową brzegu powierzchni X , to niezależnie od wyboru struktury CW-kompleksu na X , występuje w niej taka sama liczba wierzchołków i krawędzi. W szczególności strukturę tę można wybrać tak, aby b składała się z jednego wierzchołka i jednej krawędzi.

Przypuśćmy najpierw, że a jest nierozdzielający. Wtedy $X \setminus a$ ma o jeden wierzchołek i jedną krawędź więcej względem X , zatem

$$\chi(X_a) = \chi(X) + 1 - 1 = \chi(X).$$

Jeśli a jest rozdzielający, to obie powierzchnie X_1, X_2 mają o jedną więcej składową brzegu niż X . Utożsamienie ze sobą tych składowych brzegu w celu otrzymania X powoduje zmniejszenie liczby wierzchołków i liczby krawędzi w CW-kompleksie $X_1 \cup X_2$ o jeden, a stąd

$$\chi(X) = \chi(X_1) + \chi(X_2) + 1 - 1 = \chi(X_1) + \chi(X_2).$$

□

Fakt 1.2.11. [19, str. 39] *Jeżeli a, b są dwoma okręgami nierozdzielającymi na powierzchni orientowalnej $S_{g,n}^k$, to istnieje zachowujący orientację homeomorfizm $\phi : S_{g,n}^k \rightarrow S_{g,n}^k$ taki, że $\phi(a) = b$.*

Dowód. Obie powierzchnie $S^a = S_{g,n}^k \setminus a$ i $S^b = S_{g,n}^k \setminus b$ są orientowalne, mają $n + 2$ składowych brzegu (n pochodzących z $S_{g,n}$ i dwie pochodzące od a i b odpowiednio) oraz k nakłuć, a ponadto – na mocy Faktu 1.2.10 – takie same charakterystyki Eulera, zatem są homeomorficzne.

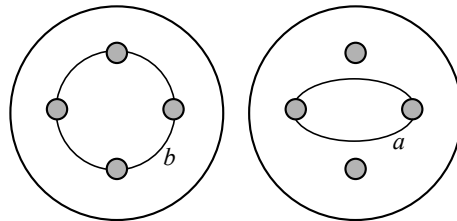
Oznaczmy przez $h_a : a_1 \rightarrow a_2$, $h_b : b_1 \rightarrow b_2$ homeomorfizmy między składowymi brzegu S^a i S^b odpowiednio takie, że $S^a / (x \sim h_a(x))$ i $S^b / (y \sim h_b(y))$ są homeomorficzne z $S_{g,n}^k$. Istnieje homeomorfizm $S^a \rightarrow S^b$, który zachowuje relacje równoważności $x \sim h_a(x)$ dla $x \in a_1$ i $y \sim h_b(y)$ dla $y \in b_1$, a więc indukuje homeomorfizm $\phi : S_{g,n}^k \rightarrow S_{g,n}^k$ taki, że $\phi(a) = \phi(b)$. Jeżeli ϕ nie zachowuje orientacji, wystarczy złożyć go z dowolnym odwracającym orientację homeomorfizmem $S_{g,n}^k$, który zachowuje b . \square

Homeomorfizm (zachowujący orientację w przypadku powierzchni orientowalnej) powierzchni X przekształcający okrąg a (rozdzielający lub nie) w okrąg b istnieje wtedy i tylko wtedy gdy powierzchnie $X \setminus a$ i $X \setminus b$ są homeomorficzne. Istnienie takiego homeomorfizmu jest relacją równoważności — jej klasy abstrakcji nazywamy *typami topologicznymi* okręgów na powierzchni [19, str. 39].

Definicja 1.2.12. Okręgi a i b na powierzchni X są *topologicznie równoważne*, jeżeli powierzchnie (być może niespójne) $X \setminus a$ i $X \setminus b$ są homeomorficzne.

Wniosek 1.2.13. *Wszystkie okręgi nierozdzielające na powierzchni orientowalnej są topologicznie równoważne.*

W przypadku nieorientowalnym sytuacja nieco się komplikuje — przede wszystkim okręgi jednostronne (zawsze nierozdzielające) nie są topologicznie równoważne z dwustronnymi okręgami nierozdzielającymi: jeżeli c jest jednostronny, to $N_g \setminus c$ ma jedną składową brzegu, natomiast jeśli jest dwustronny, to $N_g \setminus c$ ma dwie składowe brzegu. Jednak nawet nie wszystkie dwustronne okręgi nierozdzielające są topologicznie równoważne. Przykładowo na powierzchni N_4 istnieje dwustronny okrąg a nierozdzielający taki, że $N_4 \setminus a = N_{2,2}$, ale istnieje też dwustronny okrąg nierozdzielający b , którego dopełnienie jest powierzchnią orientowalną $N_4 \setminus b = S_{1,2}$ (Rysunek 1.3 – oczywiście, przedstawione przykłady nie są jedyne). Wynika to z tego, że choć



Rysunek 1.3: Nierównoważne topologicznie okręgi dwustronne na powierzchni N_4 . Zachodzi $N_4 \setminus a = N_{2,2}$ oraz $N_4 \setminus b = S_{1,2}$.

charakterystyka Eulera powierzchni $N_g \setminus c$, gdzie c jest dowolnym dwustronnym okręgiem nierozdzielającym, jest jednoznacznie wyznaczona, to orientowalność — nie. Zauważmy jednak, że dopełnienie nierozdzielającego okręgu dwustronnego c w N_g może być orientowalne wyłącznie gdy g jest parzyste, ponieważ

$$\chi(S_{x,2}) = \chi(N_{2x,2}) = \chi(N_g) \implies g - 2 = 2x \implies g = 2(x + 1).$$

Wynika to również z dowodu twierdzenia o klasyfikacji powierzchni [22], w którym pokazuje się, że jeżeli na powierzchni występują zarówno „rączki” (sumy spójne z torusem), jak i wstęgi Möbiusa, to każdą rączkę można homeomorficznie przekształcić w dwie wstęgi Möbiusa.

Typy topologiczne okręgów nierozdzielających na N_g zostały wymienione w Tabeli 1.1.

Tabela 1.1: Typy topologiczne okręgów nierozdzielających na N_g .

g parzyste	g nieparzyste
krzywe dwustronne c $N_g \setminus c = N_{g-2,2}$	krzywe dwustronne c $N_g \setminus c = N_{g-2,2}$
krzywe dwustronne c $N_g \setminus c = S_{\frac{g-2}{2},2}$	krzywe jednostronne c $N_g \setminus c = S_{\frac{g-1}{2},1}$
krzywe jednostronne c $N_g \setminus c = N_{g-1,1}$	krzywe jednostronne c $N_g \setminus c = N_{g-1,1}$

Zauważmy, że okrąg rozdzielający na powierzchni S_g rozcina tę powierzchnię na dwie podpowierzchnie: $S_{k,1}, S_{g-k,1}$ dla pewnego $k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor\}$. W przypadku nieorientowalnym po rozcięciu N_g wzdłuż okręgu rozdzielającego możemy otrzymać następujące pary powierzchni:

- $N_{k,1}$ i $N_{g-k,1}$ dla pewnego $k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor\}$,
- $N_{k,1}$ i $S_{\frac{g-k}{2},1}$, gdy $k \in \{0, 1, \dots, g\}$ oraz $g - k$ jest parzyste,
- $S_{\frac{k}{2},1}$ i $S_{\frac{g-k}{2},1}$, gdy g oraz $k \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor\}$ są parzyste.

1.3 Grupa podstawowa i pierwsza grupa homologii powierzchni

Ścieżką w przestrzeni X nazywamy ciągle odwzorowanie $f : [0, 1] \rightarrow X^1$. Jeżeli $f(0) = f(1)$, to ścieżkę f nazywamy pętlą. Mając dane dwie pętle $f, g : [0, 1] \rightarrow X$, definiujemy ich złożenie (konkatenację) $f \cdot g$ wzorem

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{dla } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1), & \text{dla } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

¹W szczególności ścieżki są zorientowane – w przeciwieństwie do okręgów i łuków definiujemy je jako odwzorowania, a nie ich obrazy. Zwykle jednak będziemy nadużywać notacji i nie będziemy odróżniać ścieżki jako odwzorowania ciągłego od ścieżki jako obrazu odwzorowania ciągłego, przyjmując taką interpretację, jaka w danym momencie jest wygodna.

Pisząc o *homotopii ścieżek*, mamy na myśli homotopię względną względem $\{0, 1\}$, to znaczy $\{f_t : [0, 1] \rightarrow X\}_{t \in [0, 1]}$ taką, że końce $f_t(0) = x_0$, $f_t(1) = x_1$ nie zależą od t . Homotopię ścieżek oznaczamy $f_0 \simeq f_1 \text{ rel}\{0, 1\}$.

Zbiór klas homotopii $[f]$ pętli $f : [0, 1] \rightarrow X$ takich, że $f(0) = f(1) = x_0 \in X$ oznaczamy przez $\pi_1(X, x_0)$. Zbiór ten z działaniem $[f][g] = [f \cdot g]$ stanowi grupę zwaną *grupą podstawową* przestrzeni X z punktem bazowym x_0 i oznaczaną $\pi_1(X, x_0)$ [29, Stwierdzenie 1.3.]. Jeżeli X jest łukowo spójna, to $\pi_1(X, x_0)$ jest izomorficzna z $\pi_1(X, x_1)$, gdzie x_1 jest dowolnym innym punktem bazowym w X [29, Stwierdzenie 1.5], zatem w tym przypadku grupę podstawową możemy oznaczać po prostu przez $\pi_1(X)$.

Fakt 1.3.1. [29, str. 34] *Dowolne ciągle odwzorowanie $\phi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ takie, że $\phi(x_0) = y_0$ indukuje homomorfizm $\phi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ zdefiniowany przez $\phi_*[f] = [\phi f]$ o własnościach:*

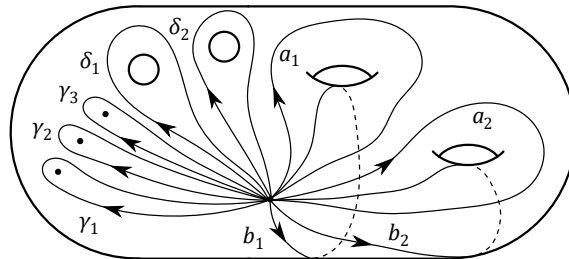
- jeżeli ϕ jest homeomorfizmem, to ϕ_* jest izomorfizmem,
- $(\psi\phi)_* = \psi_*\phi_*$ dla odwzorowań ciągłych $(X, x_0) \xrightarrow{\phi} (Y, y_0) \xrightarrow{\psi} (Z, z_0)$,
- $id : X \rightarrow X$ indukuje $id : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

Fakt 1.3.2. [58, str. 64] *Grupy podstawowe powierzchni $S_{g,n}^k$ i $N_{g,n}^k$ mają następujące przedstawienie*

$$\pi_1(S_{g,n}^k) = \left\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \mid \left(\prod_{j=1}^k \gamma_j \right) \cdot \left(\prod_{l=1}^n \delta_l \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \right) \right\rangle,$$

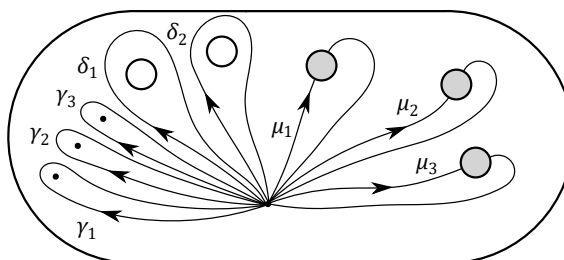
$$\pi_1(N_{g,n}^k) = \left\langle \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \mid \left(\prod_{j=1}^k \gamma_j \right) \cdot \left(\prod_{l=1}^n \delta_l \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^g \mu_i^2 \right) \right\rangle.$$

Generatory można wybrać tak, aby pętle a_i, b_i $i = 1, 2, \dots, g$ odpowiadały $2g$ okręgom na powierzchni S_g powstałym przez sklejenie $4g$ -kąta foremnego (Rysunek 1.1), μ_i – g okręgom na N_g powstałym przez odpowiednie sklejenie $2g$ -kąta foremnego (Rysunek 1.2), każda z pętli γ_j , $j = 1, 2, \dots, k$ owijała się jednokrotnie wokół j -tego nakłucia, a każda z pętli δ_l , $l = 1, 2, \dots, n$ wokół l -tej składowej brzegu. Przykłady znajdują się na Rysunkach 1.4 i 1.5.



Rysunek 1.4: Generatory grupy podstawowej $\pi_1(S_{2,2}^3)$.

W dalszych częściach pracy będziemy korzystali z własności pierwszych grup homologii powierzchni. Podstawowe definicje i twierdzenia związane z singularnymi grupami homologii



Rysunek 1.5: Generatory grupy podstawowej $\pi_1(N_{3,2}^3)$.

można znaleźć w [29, Rozdział 2]. My ograniczymy się tylko do przywołania faktu o tym, że pierwsza grupa homologii przestrzeni łukowo spójnej jest abelianizacją jej grupy podstawowej.

Definicja 1.3.3. *Komutantem* grupy G nazywamy podgrupę

$$[G, G] = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle = \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \rangle$$

generowaną przez wszystkie komutatory. Komutant jest podgrupą normalną grupy G .

Definicja 1.3.4. *Abelianizacją* grupy G nazywamy grupę ilorazową

$$G^{ab} = G/[G, G].$$

Uwaga 1.3.5. Odwzorowanie ciągle $f : [0, 1] \rightarrow X$ można traktować jak singularny sympleks 1-wymiarowy. Jeżeli ponadto $f(0) = f(1)$, to $\partial f = f(1) - f(0) = 0$, czyli f jest cyklem. Oznacza to, że elementom grupy podstawowej $\pi_1(X)$ można przyporządkować elementy $H_1(X)$.

Twierdzenie 1.3.6. [29, Twierdzenie 2A.1] *Niech X będzie przestrzenią łukowo spójną. Odwzorowanie*

$$\psi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$$

które – zgodnie z Uwagą 1.3.5 – przyporządkowuje pętłom cykle 1-wymiarowe, jest epimorfizmem.

Ponadto $\ker \psi = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$, zatem ψ indukuje izomorfizm

$$\pi_1(X, x_0)^{ab} \cong H_1(X).$$

Przykład 1.3.7. [29, Przykład 2A.2] Z Faktu 1.3.2

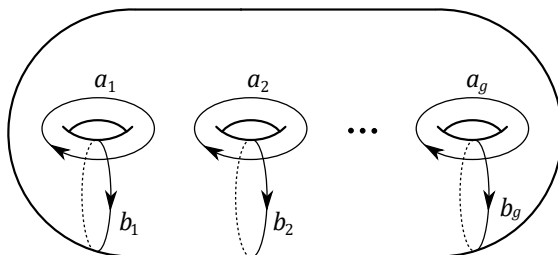
$$\pi_1(S_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle,$$

więc korzystając z Twierdzenia 1.3.6 i przechodząc na notację addytywną otrzymujemy

$$H_1(S_g; \mathbb{Z}) = \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \sum_{i=1}^g (a_i + b_i - a_i - b_i) \right\rangle^{ab} = \mathbb{Z}^{2g}.$$

Bazę $H_1(S_g)$ stanowią cykle reprezentowane przez komórki 1-wymiarowe w standardowej strukturze

CW -kompleksu na S_g . Można je homotopijnie przekształcić do pętli takich jak przedstawione na Rysunku 1.6.



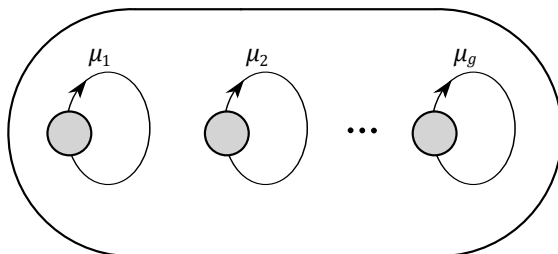
Rysunek 1.6: Generatory pierwszej grupy homologii $H_1(S_g)$.

Analogicznie, ponieważ

$$\pi_1(N_g) = \langle \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g, \mid \mu_1^2 \mu_2^2 \cdots \mu_g^2 \rangle,$$

więc

$$\begin{aligned} H_1(N_g; \mathbb{Z}) &= \langle \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g \mid 2(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_g) \rangle^{ab} \stackrel{(0,0,\dots,0,1) \mapsto (1,1,\dots,1,1)}{=} \\ &= \langle \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{g-1}, \mu_1 + \dots + \mu_g \mid 2(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_g) \rangle^{ab} = \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$



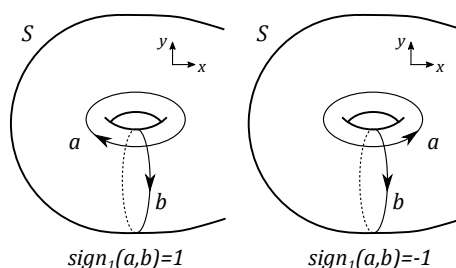
Rysunek 1.7: Generatory pierwszej grupy homologii $H_1(N_g)$.

Uwaga 1.3.8. Licząc homologie o współczynnikach z \mathbb{Z}_2 otrzymujemy przestrzeń liniową $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^g$.

Definicja 1.3.9. Niech a, b będą zorientowanymi okręgami na powierzchni orientowalnej S (niekoniecznie w położeniu minimalnym) przecinającymi się n razy. Oznaczmy przez $sign_i(a, b)$, $i = 1, 2, \dots, n$, indeks przecięcia w i -tym punkcie przecięcia (Rysunek 1.8), to znaczy

$$sign_i(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{gdy orientacja } i\text{-tego przecięcia jest zgodna z orientacją na } S \\ -1, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Algebraicznym indeksem przecięcia między okręgami a, b nazywamy liczbę zdefiniowaną jako



Rysunek 1.8: Algebraiczny indeks przecięcia pomiędzy klasami homologii a, b . Zaznaczono orientację na powierzchni S .

$$\hat{i}(a, b) = \sum_{i=1}^n \text{sign}_i(a, b).$$

Uwaga 1.3.10. Otrzymana liczba $\hat{i}(a, b)$ jest niezmiennicza względem homotopijnych deformacji [58, str. 65]. Ponadto, jeśli $f : S_g \rightarrow S_g$ jest homeomorfizmem zachowującym orientację, to $\hat{i}(f(a), f(b)) = \hat{i}(a, b)$ dla dowolnych klas homologii $a, b \in H_1(S_g; \mathbb{Z})$.

Uwaga 1.3.11. Istnieje forma dwuliniowa $J : H_1(S_g; \mathbb{Z}) \times H_1(S_g; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$, która w bazie $(a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g)$ ma postać

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{bmatrix}$$

(I_g symbolizuje macierz identycznościową rzędu g , a 0 macierz zerową rzędu g), to znaczy jest dana przez algebraiczny indeks przecięcia klas homologii [58, Stwierdzenie 3.1.10].

W przypadku nieorientowalnym istnieje forma $\langle \cdot, \cdot \rangle : H_1(N_g; \mathbb{Z}_2) \times H_1(N_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, która w bazie $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g)$ określona jest wzorem [59, Sekcja 1]

$$\begin{aligned} \langle \mu_i, \mu_j \rangle &= 0 & i, j \in \{1, 2, \dots, g\}, i \neq j \\ \langle \mu_i, \mu_i \rangle &= 1 \end{aligned}$$

w skrócie $\langle c_i, c_j \rangle = \delta_{ij}$, można więc ją utożsamiać ze standardowym iloczynem skalarnym na \mathbb{Z}_2^g . Odpowiada jej macierz identycznościowa I_g . Dla tej formy dwuliniowej również prawdą jest, że jeżeli $f : N_g \rightarrow N_g$ jest homeomorfizmem, to $\langle f(a), f(b) \rangle = \langle a, b \rangle$ dla dowolnych klas homologii a, b w $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$.

1.4 Przestrzenie nakrywające powierzchnie

Niech X będzie przestrzenią topologiczną.

Definicja 1.4.1. *Nakryciem* przestrzeni X nazywamy parę (\tilde{X}, p) , taką że

- \tilde{X} jest przestrzenią topologiczną (zwaną przestrzenią nakrywającą),

- $p : \tilde{X} \rightarrow X$ jest odwzorowaniem ciągłym będącym lokalnym homeomorfizmem spełniającym warunek: dla dowolnego punktu $x \in X$ istnieje otoczenie otwarte $U \subset X$, którego przeciwobraz $p^{-1}(U)$ jest rozłączną sumą otwartych podzbiorów $\tilde{U}_\alpha \subset \tilde{X}$, z których każdy jest homeomorficzny z U .

Lemat 1.4.2. [20, Lemat 23.2 (Poincaré-Volterra)] *Niech X będzie spójną rozmaitością, Y – przestrzenią Hausdorffa o przeliczalnej bazie oraz $f : X \rightarrow Y$ odwzorowaniem ciągłym takim, że dla każdego $y \in Y$ przeciwobraz $f^{-1}(y)$ jest zbiorem dyskretnym w X . Wówczas X posiada przeliczalną bazę.*

Wniosek 1.4.3. *Przestrzeń nakrywająca powierzchnię jest powierzchnią.*

Dowód. Jeżeli \tilde{X} jest przestrzenią nakrywającą powierzchnię X , to \tilde{X} jest przestrzenią Hausdorffa lokalnie homeomorficzną z \mathbb{R}^2 (lub \mathbb{R}_+^2), ponieważ $p : \tilde{X} \rightarrow X$ jest lokalnym homeomorfizmem. Lemat 1.4.2 implikuje, że \tilde{X} spełnia też drugi aksjomat przeliczalności. \square

Niekiedy nakryciem nazywa się samo odwzorowanie $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Zauważmy, że jeśli X jest przestrzenią spójną, to dla dowolnego $x \in X$ moc zbioru $p^{-1}(x)$ jest stała. Jeżeli $n = |p^{-1}(x)|$, to mówimy, że p jest nakryciem n -krotnym lub stopnia n . Stopień nakrycia może być nieskończony.

Definicja 1.4.4. *Podniesieniem odwzorowania $f : Y \rightarrow X$ nazywamy odwzorowanie $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$*

takie, że $p\tilde{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Twierdzenie 1.4.5. *Jeżeli $p : \tilde{X} \rightarrow X$ jest nakryciem stopnia n , to*

$$\chi(\tilde{X}) = n \cdot \chi(X).$$

Dowód. Każda komórka podnosi się do n komórek, więc

$$\chi(\tilde{X}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i n \cdot |c_i| = n \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^i |c_i| = n \cdot \chi(X).$$

\square

Fakt 1.4.6. [29, Stwierdzenie 1.30.] *Niech (\tilde{X}, p) będzie nakryciem, $\{f_t : Y \rightarrow X\}$ – homotopią oraz $\tilde{f}_0 : Y \rightarrow \tilde{X}$ – podniesieniem f_0 . Wówczas istnieje dokładnie jedna homotopia $\{\tilde{f}_t : Y \rightarrow \tilde{X}\}$ odwzorowania \tilde{f}_0 będąca podniesieniem $\{f_t\}$.*

Własność opisaną w Fakcie 1.4.6 nazywamy *własnością podnoszenia homotopii*. Jej szczególnym przypadkiem jest *własność podnoszenia ścieżek*. Ponadto podniesienie homotopii ścieżek (relatywnej względem końców $\{0, 1\}$) jest homotopią ścieżek [29, str. 60 - 61].

Fakt 1.4.7. [29, Stwierdzenie 1.31] *Homomorfizm $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ indukowany przez nakrycie $p : \tilde{X} \rightarrow X$ jest monomorfizmem. Obraz $p_* \left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \right)$ w $\pi_1(X, x_0)$ składa się z klas homotopii pętli w X zaczepionych w x_0 , których podniesienia do \tilde{X} o początku w \tilde{x}_0 są pętlami.*

Wszystkie twierdzenia i fakty przytoczone w tym podrozdziale mają ogólniejsze sformułowanie (porównaj z [29, Podrozdział 1.3]), jednak ze względu na chęć uniknięcia wprowadzania wielu dodatkowych definicji, które nie mają bezpośredniego związku z tematyką tej pracy, formułujemy je wyłącznie w odniesieniu do powierzchni/rozmaitości topologicznych.

Do końca Podrozdziału 1.4 zakładamy, że wszystkie przestrzenie X , \tilde{X} , Y są powierzchniami.

Definicja 1.4.8. Niech $p : \tilde{X} \rightarrow X$ będzie nakryciem. *Przekształceniem nakrywającym* nazywamy

homeomorfizm $\phi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ taki, że $p\phi = p$.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\phi} & \tilde{X} \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & & X \end{array}$$

Przekształcenia nakrywające z działaniem składania odwzorowań tworzą grupę, którą będziemy oznaczać przez $\text{Aut}(p)$. Z jednoznaczności podniesienia [29, Stwierdzenie 1.34] przekształcenie nakrywające jest jednoznacznie wyznaczone przez swoją wartość w jednym punkcie. W szczególności jedynym elementem $\text{Aut}(p)$ stałym na jakimkolwiek punkcie \tilde{X} jest identyfikacja.

Definicja 1.4.9. Nakrycie $p : \tilde{X} \rightarrow X$ nazywamy *normalnym*, jeżeli dla każdego $x \in X$ i każdej pary \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 jego podniesień istnieje przekształcenie nakrywające ϕ takie, że $\phi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

Fakt 1.4.10. [29, Stwierdzenie 1.39] *Niech \tilde{X}, X będą powierzchniami. Wówczas*

(a) *Nakrycie $p : \tilde{X} \rightarrow X$ jest normalne wtedy i tylko wtedy, gdy $p_* \left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \right)$ jest podgrupą normalną $\pi_1(X, x_0)$.*

(b) *Jeżeli $p : \tilde{X} \rightarrow X$ jest normalne, to $\text{Aut}(p) \cong \pi_1(X, x_0) / p_* \left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \right)$.*

Wymienione twierdzenia dotyczące nakryć będziemy wykorzystywać w szczególnym przypadku nakryć pochodzących od działań grup na powierzchniach. Niech G będzie grupą, a X przestrzenią topologiczną. Przez $\text{Homeo}(X)$ oznaczamy grupę homeomorfizmów $X \rightarrow X$. *Działaniem grupy G na X* nazywamy homomorfizm $\varrho : G \rightarrow \text{Homeo}(X)$. Każdemu $g \in G$ przyporządkowujemy homeomorfizm $\varrho(g) : X \rightarrow X$, który będziemy oznaczać przez $g : X \rightarrow X$. Jeżeli ϱ jest monomorfizmem, to utożsamiamy w ten sposób grupę G z pewną podgrupą $\text{Homeo}(X)$.

Definicja 1.4.11. Mówimy, że grupa G działa na X w sposób

- *wolny*, jeżeli elementy G różne od elementu neutralnego nie mają punktów stałych na X ,

$$(\exists_{x \in X} g(x) = x) \implies g = 1$$

- *właściwie dyskretny*, jeżeli każdy punkt $x \in X$ posiada otoczenie U takie, że zbiór $\{g \in G \mid U \cap g(U) \neq \emptyset\}$ jest zbiorem skończonym².

Wniosek 1.4.12. *Jeżeli G jest grupą skończoną, to G działa na X w sposób właściwie dyskretny.*

Definicja 1.4.13. *Stabilizatorem (lub grupą izotropii) punktu $x \in X$ przy działaniu grupy G na X nazywamy podgrupę*

$$\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g(x) = x\}.$$

Uwaga 1.4.14. Grupa G działa na X w sposób wolny, jeżeli każdy punkt $x \in X$ ma trywialny stabilizator. Jeżeli grupa G działa na X w sposób właściwie dyskretny, to każdy punkt $x \in X$ ma skończony stabilizator.

Definicja 1.4.15. *Orbitą punktu $x \in X$ przy działaniu grupy G na X nazywamy zbiór*

$$Gx = \{g(x) \mid g \in G\}.$$

Jeżeli orbita $G(x)$ składa się z n punktów, będziemy mówić, że jest ona *długości n* .

Fakt 1.4.16. [29, Ćwiczenie 23, str. 81] *Jeżeli G działa na przestrzeni Hausdorffa X w sposób wolny i właściwie dyskretny, to G spełnia*

$$(*) \quad (\forall x \in X \exists U \forall_{g_1, g_2 \in G} g_1(U) \cap g_2(U) \neq \emptyset) \implies g_1 = g_2,$$

gdzie U jest otwartym otoczeniem punktu x .

Dowód. Ustalmy $x \in X$. Niech $U_x \subset X$ będzie takim otoczeniem punktu x , że zbiór $\{g \in G \mid U_x \cap g(U_x) \neq \emptyset\}$ jest skończony. Oznaczmy $\{g \in G \mid U_x \cap g(U_x) \neq \emptyset\} = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

Ustalmy $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, takie że $g_i \neq 1$. Ponieważ G działa na X w sposób wolny, to $g_i x \neq x$, czyli $g_i x \in U_x \setminus \{x\}$. X jest przestrzenią Hausdorffa, zatem istnieją rozłączne zbiory otwarte $V_i, V'_i \subset U_x$, takie że $x \in V_i$, $g_i x \in V'_i$ oraz otwarte otoczenie $W_i \subset X$ punktu x , dla którego $g_i(W_i) \subseteq V'_i$. Wtedy $U_i = V_i \cap W_i \subset U_x$ jest zbiorem otwartym rozłącznym z V'_i spełniającym $g_i(U_i) \subseteq V'_i$, a więc $U_i \cap g_i(U_i) = \emptyset$.

Zbiór $U = \bigcap_{i=1}^n U_i \subset U_x$ jest otwarty oraz

$$U \cap g(U) = \bigcap_{i=1}^n U_i \cap g \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right) = \bigcap_{i=1}^n U_i \cap \bigcap_{i=1}^n g(U_i) = \bigcap_{i=1}^n (U_i \cap g(U_i)),$$

więc $U \cap gU \neq \emptyset$ wyłącznie gdy $g = 1$. W szczególności dla dowolnych $g_1, g_2 \in G$, jeśli $g_1(U) \cap g_2(U) \neq \emptyset$, to $U \cap g_1^{-1}g_2(U) \neq \emptyset$, co implikuje $g_1^{-1}g_2 = 1$, czyli $g_1 = g_2$. \square

Mając dane działanie grupy G na przestrzeni X możemy utworzyć przestrzeń ilorazową X/G ,

²Niekiedy przez działanie właściwie dyskretne rozumie się mocniejszą własność (*), że każdy punkt $x \in X$ posiada otoczenie U takie, że dla różnych $g \in G$ obrazy $g(U)$ są zbiorami rozłącznymi. W tej pracy przyjmujemy jednak konwencję zgodną z Definicją 1.4.11. Zauważmy, że jeżeli G działa na X w sposób wolny i właściwie dyskretny, to działanie to spełnia (*) – Fakt 1.4.16.

w której utożsamiamy ze sobą wszystkie punkty z orbity $Gx = \{gx \mid g \in G\}$. Przestrzeń X/G nazywamy *przestrzenią orbit* działania G na X .

Fakt 1.4.17. [29, Stwierdzenie 1.40] *Niech grupa G działa na powierzchni X w sposób wolny i właściwie dyskretny. Wtedy*

- (a) *przekształcenie ilorazowe $p : X \rightarrow X/G$ dane wzorem $p(x) = Gx$ jest nakryciem normalnym.*
- (b) $G = \text{Aut}(p)$,
- (c) $G \cong \pi_1(X/G) / p_*(\pi_1(X))$.

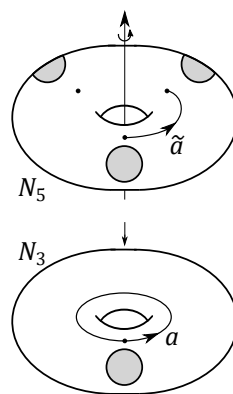
Dowód. Ustalmy $x \in X$ i niech $U \subset X$ będzie takim otoczeniem punktu x , że dla różnych $g \in G$ obrazy $g(U)$ są rozłączne. Przekształcenie ilorazowe p przekształca rodzinę rozłącznych zbiorów otwartych $\{g(U) \mid g \in G\}$ na jeden zbiór otwarty $p(U) \subset X/G$. Z definicji topologii ilorazowej dla dowolnego $g \in G$ odwzorowanie $p|_{g(U)}$ jest homeomorfizmem na $p(U)$, zatem $p : X \rightarrow X/G$ jest nakryciem. Każdy element $g \in G$ jest przekształceniem nakrywającym, ponieważ $p(x) = p(gx)$, oraz nakrycie (X, p) jest normalne, ponieważ $g_2 g_1^{-1}$ przekształca $g_1(U)$ na $g_2(U)$.

Grupa G jest podgrupą $\text{Aut}(p)$. Dla dowolnego przekształcenia nakrywającego $\phi \in \text{Aut}(p)$ oraz dowolnego $x \in X$ punkty x i $\phi(x)$ należą do tej samej orbity Gx oraz istnieje $g \in G$ takie, że $g(x) = \phi(x)$. Ponieważ przekształcenia nakrywające powierzchni nakrywającej są jednoznacznie wyznaczone przez swoją wartość w jednym punkcie, to $\phi = g \in G$, a więc $G = \text{Aut}(p)$.

Część (c) wynika z Faktu 1.4.10 (b). □

Wniosek 1.4.18. *Jeżeli X jest powierzchnią oraz grupa G działa na X w sposób wolny i właściwie dyskretny, to X/G jest powierzchnią.*

Przykład 1.4.19. Przedstawmy powierzchnię N_5 jako torus z trzema wstęgami Möbiusa i niech f będzie jej obrotem rzędu 3 (Rysunek 1.9).



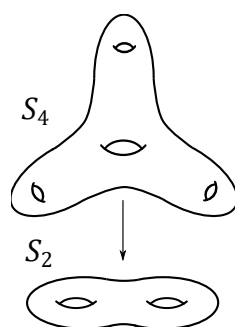
Rysunek 1.9: Nakrycie $N_5 \rightarrow N_3$.

Wówczas $G = \langle f \rangle \cong C_3$ działa na N_5 w sposób wolny i właściwie dyskretny. Przestrzenią orbit działania G na N_5 jest torus z jedną wstęgą Möbiusa, otrzymany z jednej z trzech podpowierzchni izomorficznych z $N_{1,2}$ przez sklejenie jej składowych brzegu, czyli powierzchnia N_3 . Z Faktu 1.4.17

istnieje nakrycie normalne $N_5 \rightarrow N_3$ oraz $\pi_1(N_3)$ zawiera jako podgrupę normalną indeksu 3 grupę izomorficzną z $\pi_1(N_5)$. Pętla a przedstawiona na Rysunku nie znajduje się w obrazie $p_*(\pi_1(N_5))$, ponieważ jej podniesienie nie jest pętlą.

Powyższy przykład można uogólnić na przypadek n -krotnego nakrycia $N_{2+kn} \rightarrow N_{2+k}$. Powierzchnię N_{2+kn} reprezentujemy jako torus z $k \cdot n$ wstęgami Möbiusa ułożonymi w sposób symetryczny w wierzchołkach n -kąta foremnego, a nakrycie pochodzi od grupy generowanej przez obrót tej powierzchni o kąt $\frac{2\pi}{n}$.

Przykład 1.4.20. Przedstawmy powierzchnię S_{1+kn} tak, aby posiadała ona symetrię obrotową rzędu n . Wówczas obrót rzędu n indukuje nakrycie $S_{1+kn} \rightarrow S_{1+k}$. Przykład dla $k = 1$ i $n = 3$ znajduje się na Rysunku 1.10.



Rysunek 1.10: Nakrycie $S_4 \rightarrow S_2$.

Przykład można dalej uogólniać: niech dane będą dwie powierzchnie S_{1+kn} , które łączymy za pomocą n pierścieni w taki sposób, aby otrzymana powierzchnia $S_{n(2k+1)+1}$ była niezmiennicza względem obrotu rzędu n w \mathbb{R}^3 . Wtedy obrót ten indukuje nakrycie $S_{n(2k+1)+1} \rightarrow S_{2k+2}$. I tak dalej.

Definicja 1.4.21. Ciąg homomorfizmów

$$\dots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \dots$$

nazywamy *dokładnym*, jeżeli $\ker \alpha_n = \operatorname{im} \alpha_{n+1}$.

Krótki ciąg

$$1 \longrightarrow G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} K \longrightarrow 1$$

jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różnowartościowe, g jest „na” i $\ker g = \operatorname{im} f$, czyli gdy g indukuje izomorfizm $K \cong H / \operatorname{im} f$.

Uwaga 1.4.22. Fakty 1.4.7 i 1.4.17 implikują, że jeżeli G działa na powierzchni X w sposób wolny i właściwie dyskretny, to nakrycie $p: X \rightarrow X/G$ indukuje krótki ciąg dokładny

$$1 \longrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X/G) \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow 1.$$

W Fakcie 1.4.23 opiszemy konstrukcję epimorfizmu φ .

Fakt 1.4.23. [71, Twierdzenie 4.9] Niech G działa na powierzchni X w sposób wolny i właściwie dyskretny. Ustalmy $x_0 \in X$ i niech $p : X \rightarrow G/X$ będzie rzutowaniem na przestrzeń orbit. Istnieje epimorfizm $\varphi : \pi_1(X/G, p(x_0)) \rightarrow G$ taki, że dla (klasy homotopii) pętli $\gamma \in \pi_1(X/G)$ i jej (jedynego) podniesienia $\tilde{\gamma}$ na X o własności $\tilde{\gamma}(0) = x_0$ zachodzi

$$\tilde{\gamma}(1) = \varphi(\gamma)(x_0).$$

Innymi słowy, epimorfizm φ posyła klasę homotopii pętli γ na taki element $g \in G$, dla którego $g(x_0) = \tilde{\gamma}(1)$. Jądrem epimorfizmu φ jest podgrupa $p_*(\pi_1(X, x_0))$.

Dowód. Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow X/G$ będzie pętlą zaczepioną w $p(x_0)$. Z własności podnoszenia ścieżek istnieje dokładnie jedno podniesienie $\tilde{\gamma}$ pętli γ , którego początek jest w x_0 , $\tilde{\gamma}(0) = x_0$.

Oczywiście, punkty $\tilde{\gamma}(0)$ i $\tilde{\gamma}(1)$ należą do tej samej orbity działania G na X , ponieważ $p(\tilde{\gamma}(0)) = \gamma(0) = \gamma(1) = p(\tilde{\gamma}(1))$. Stąd istnieje element $g \in G$ taki, że $g(x_0) = \tilde{\gamma}(1)$. Jest on jednoznacznie wyznaczony, bo G działa na X w sposób wolny: dla $g_1, g_2 \in G$ takich, że $g_1(x_0) = \tilde{\gamma}(1) = g_2(x_0)$ zachodzi $g_1 g_2^{-1}(\tilde{\gamma}(1)) = \tilde{\gamma}(1)$, a więc $g_1 g_2^{-1} = 1$. Ponadto g zależy wyłącznie od klasy homotopii pętli γ , ponieważ podniesienie homotopii ścieżek (to znaczy relatywnej względem $\{0, 1\}$) jest homotopią ścieżek, to znaczy jeżeli $\gamma' \simeq \gamma \text{ rel}\{0, 1\}$ i podniesienie $\tilde{\gamma}'$ jest takie, że $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}(0) = x_0$, to $\tilde{\gamma}' \simeq \tilde{\gamma} \text{ rel}\{0, 1\}$. W szczególności $\tilde{\gamma}'(1) = \tilde{\gamma}(1)$. Istnieje więc dobrze zdefiniowana funkcja

$$\varphi : \pi_1(X/G, p(x_0)) \rightarrow G$$

o własności $\tilde{\gamma}(1) = \varphi(\gamma)(x_0)$.

Pokażemy, że φ jest homomorfizmem. Niech $\alpha, \beta \in \pi_1(X/G, p(x_0))$, oraz niech $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ będą podniesieniami α, β odpowiednio takimi, że $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = x_0$. Oznaczmy $\varphi(\alpha) = g_\alpha$ i $\varphi(\beta) = g_\beta$. Zachodzi wówczas $g_\alpha(x_0) = \tilde{\alpha}(1)$ oraz $g_\beta(x_0) = \tilde{\beta}(1)$. Ponieważ G jest grupą przekształceń nakrywających nakrycia p , to $g_\alpha(\tilde{\beta})$ również jest podniesieniem pętli β i jest jedynym jej podniesieniem o początku w $\tilde{\alpha}(1)$.

Jeżeli $\alpha \cdot \beta$ jest złożeniem (konkatenacją) pętli, to jedynym podniesieniem $\alpha \cdot \beta$ o początku w x_0 jest ścieżka $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow X$ dana wzorem

$$\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}(2t) & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_\alpha(\tilde{\beta}(2t-1)) & \text{dla } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Stąd

$$\varphi(\alpha \cdot \beta)(x_0) = \tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}(1) = g_\alpha(\tilde{\beta}(1)) = g_\alpha(g_\beta(x_0)) = g_\alpha g_\beta(x_0) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)(x_0).$$

Ponieważ X jest łukowo spójna, więc dla dowolnego $g \in G$ istnieje ścieżka γ łącząca x_0 z $g(x_0)$. Wówczas $p\gamma$ jest pętlą w X/G zaczepioną w $p(x_0)$ oraz $g = \varphi(p\gamma)$, zatem φ jest epimorfizmem.

Oznaczmy przez e element neutralny grupy G . Jeżeli γ należy do jądra $\ker \varphi$, to

$$\tilde{\gamma}(1) = e(x_0) = x_0,$$

zatem $\tilde{\gamma}$ jest pętlą w X zaczepioną w x_0 . Ponadto $\gamma = p_*(\tilde{\gamma})$, więc $\ker \varphi \subseteq p_*(\pi_1(X, x_0))$. Z drugiej strony jeśli $\gamma \in p_*(\pi_1(X, x_0))$, to $\gamma = p\tilde{\gamma}$ dla pewnej pętli $\tilde{\gamma}$ w X zaczepionej w x_0 . Wówczas $x_0 = \tilde{\gamma}(1) = \varphi(\gamma)(x_0)$, czyli $\varphi(\gamma) = e$ (przekształcenia nakrywające są wyznaczone jednoznacznie przez swoją wartość w jednym punkcie). Ostatecznie

$$\ker \varphi = p_*(\pi_1(X, x_0)).$$

□

Przykład 1.4.24. Niech t będzie obrotem rzędu 5 na powierzchni S_6 , takim jak w Przykładzie 1.4.20 ($n = 5, k = 1$) oraz niech x_0 będzie punktem bazowym na S_6 . Przestrzenią orbit $S_6 / \langle t \rangle$ jest powierzchnia S_2 . Można wybrać generatory jej grupy podstawowej w taki sposób, aby

$$\pi_1(S_6 / \langle t \rangle, p(x_0)) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \rangle,$$

oraz pętle a_i, b_i były takie jak przedstawiono na Rysunku 1.1. Zdefiniujemy homomorfizm $\varphi : \pi_1(S_6 / \langle t \rangle, p(x_0)) \rightarrow C_5 = \langle t \mid t^5 \rangle$ na generatorach.

Każda z trzech pętli generujących a_1, a_2, b_2 podnosi się do pięciu pętli na S_6 , natomiast jedna pętla b_1 podnosi się do ścieżki na S_6 będącej $\frac{1}{5}$ -tą pętli otaczającej jednokrotnie „środkowy” otwór na S_6 . Koniec tego podniesienia jest dokładnie w miejscu $t(x_0)$, więc jasne jest, że

$$\begin{aligned} \varphi(a_1) &= 1 & \varphi(a_2) &= 1 \\ \varphi(b_1) &= t & \varphi(b_2) &= 1. \end{aligned}$$

W szczególności φ jest na, ponieważ $\varphi(b_1)$ generuje $C_5 = \langle t \mid t^5 \rangle$ oraz do $\ker \varphi$ należą te pętle na S_2 , które podnoszą się do pętli, a więc są w obrazie $p_*(\pi_1(S_6, x_0))$.

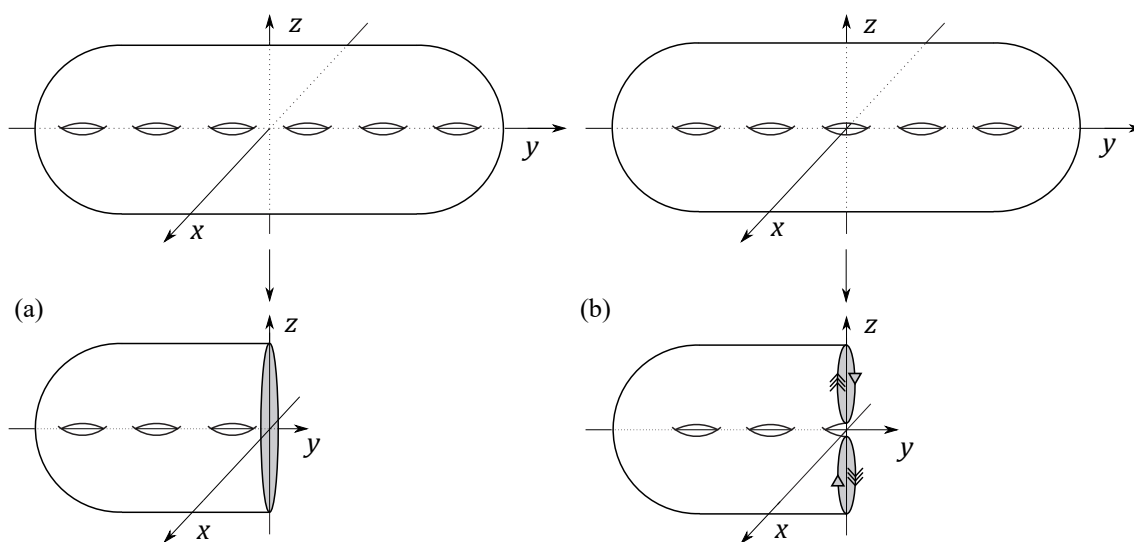
Każdemu nakryciu $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ można przyporządkować podgrupę $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ grupy $\pi_1(X, x_0)$. W przypadku powierzchni (choć nie tylko) przyporządkowanie to jest surjekcją [29, Stwierdzenie 1.36]. W szczególności X posiada nakrycie (p_0, \tilde{X}_0) z przestrzenią nakrywającą o trywialnej grupie podstawowej, które nazywamy *nakryciem uniwersalnym*.

Uwaga 1.4.25. Jeżeli $p_0 : \tilde{X}_0 \rightarrow X$ jest nakryciem uniwersalnym przestrzeni X , to dla każdego nakrycia $p : \tilde{X} \rightarrow X$, gdzie \tilde{X} jest przestrzenią spójną, istnieje nakrycie $q : \tilde{X}_0 \rightarrow \tilde{X}$ takie, że $pq = p_0$. Innymi słowy, nakrycie uniwersalne przestrzeni X jest nakryciem każdego spójnego nakrycia przestrzeni X .

Przykład 1.4.26. Jeżeli rozpatrujemy powierzchnie wyłącznie topologicznie, to nakryciem uniwersalnym sfery jest sfera, a powierzchni S_g , dla $g \geq 1$, płaszczyzna euklidesowa \mathbb{R}^2 . Jeżeli jednak rozważamy również własności metryczne powierzchni, to jest nieco inaczej. Każda

powierzchnia posiada metrykę o stałej krzywiznie Gaussa [38, Twierdzenie 1.7]. W przypadku sfery jest to metryka o stałej dodatniej krzywiznie, w przypadku torusa – metryka o stałej zerowej krzywiznie (można go przedstawić jako $\mathbb{R}^2 / (m\mathbb{Z} \oplus n\mathbb{Z})$), a w przypadku powierzchni S_g , $g \geq 2$, metryka o stałej ujemnej krzywiznie, którą nazywamy *metryką hiperboliczną*. W szczególności powierzchnie S_g , $g \geq 2$ można przedstawić jako przestrzenie orbit wolnego i właściwie dyskretnego działania pewnej podgrupy grupy izometrii płaszczyzny hiperbolicznej \mathbb{H} na \mathbb{H} . Stąd nakryciem uniwersalnym sfery jest sfera, torusa – płaszczyzna euklidesowa \mathbb{R}^2 , a powierzchni S_g , $g \geq 2$, płaszczyzna hiperboliczna \mathbb{H} .

Przykład 1.4.27. [Podwójne nakrycie N_g przez S_{g-1}] Niech powierzchnia S_{g-1} będzie umieszczona w \mathbb{R}^3 w taki sposób, aby była niezmiennicza przy symetriach względem płaszczyzn xy, yx, xz . Niech $j : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$ oznacza symetrię środkową w \mathbb{R}^3 , to znaczy involucję daną wzorem $j(x, y, z) = (-x, -y, -z)$.



Rysunek 1.11: Powierzchnia S_{g-1} jako podwójne nakrycie N_g .

Jako przestrzeń orbit $S_{g-1} / \langle j \rangle$ otrzymujemy model N_g , który jest sumą spójną powierzchni orientowalnej $S_{\frac{g-1}{2}}$ i płaszczyzny rzutowej, gdy g jest nieparzyste (Rysunek 1.4.27(a)), lub powierzchni orientowalnej $S_{\frac{g-2}{2}}$ i butelki Kleina, gdy g jest parzyste (na Rysunku 1.4.27(b) powierzchnia N_6 powstaje z $S_{2,2}$ przez utożsamienie na składowych brzegu $(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$, zgodnie z oznaczeniem za pomocą strzałek). Innymi słowy, N_g jest połową powierzchni S_{g-1} , której punkty brzegowe są utożsamione zgodnie z relacją $(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$.

Wniosek 1.4.28. *Nakryciem uniwersalnym płaszczyzny rzutowej jest sfera, a powierzchni N_g , $g \geq 1$ – płaszczyzna \mathbb{R}^2 . Jeżeli rozważamy również strukturę metryczną, to nakryciem uniwersalnym powierzchni N_g dla $g \geq 3$ jest płaszczyzna hiperboliczna \mathbb{H} .*

Uwaga 1.4.29. Szczególne znaczenie nakrycia uniwersalnego wynika między innymi z faktu, że za jego pomocą w przypadku nakryć normalnych — a więc w szczególności w przypadku nakryć

pochozących od wolnego i właściwie dyskretnego działania grupy na pewnej przestrzeni topologicznej — można zdefiniować grupę podstawową przestrzeni nakrywanej, nie korzystając z jej interpretacji jako grupy klas homotopii pętli zaczepionych w punkcie bazowym. Mianowicie, z Faktu 1.4.10 wynika, że $\text{Aut}(p) \cong \pi_1(X, x_0) / p_* \left(\pi_1(\tilde{X}_0, x_0) \right)$, a więc

$$\pi_1(X, x_0) = \text{Aut}(p_0),$$

gdzie $p_0 : (\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ jest normalnym nakryciem uniwersalnym.

Definicja grupy podstawowej przestrzeni jako grupy przekształceń nakrywających jej nakrycia uniwersalnego jest pomocna przy uogólnianiu tego pojęcia na przypadek orbifoldowej grupy podstawowej.

Definicja 1.4.30. *Pętlą zmieniającą orientację* nazywamy pętlę γ , taką że jeżeli na jej początku $\gamma(0)$ ustalimy (dwuwymiarową) orientację w otoczeniu $\gamma(0)$, to po jednokrotnym przejściu pętlą γ dochodzimy do $\gamma(1) = \gamma(0)$ ze zmienioną (dwuwymiarową) orientacją. Jeżeli pętla nie posiada tej własności, nazywamy ją *pętlą zachowującą orientację*.

Oczywiście, pętłe zmieniające orientację występują wyłącznie na powierzchniach nieorientowalnych, a nawet więcej: powierzchnia X jest nieorientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera pętlę zmieniającą orientację. Jest to równoważne z istnieniem na X podpowierzchni homeomorficznej ze wstęgą Möbiusa.

Uwaga 1.4.31. W ogólnym wypadku ścieżek, które nie są zamknięte, nie możemy ocenić zgodności orientacji na początku $\gamma(0)$ i końcu $\gamma(1)$, a więc w szczególności nie możemy mówić o własności zmieniania orientacji. Jeżeli jednak $\tilde{\gamma}$ jest ścieżką na powierzchni nakrywającej \tilde{X} będącą podniesieniem pętli γ na powierzchni nakrywanej, to nawet jeśli nie jest ona pętlą, możemy porównywać (dwuwymiarowe) orientacje w otoczeniach $\tilde{\gamma}(0)$ i $\tilde{\gamma}(1)$, korzystając z tego, że oba te punkty są podniesieniami punktu bazowego powierzchni X oraz faktu, że jednokrotne przejście ścieżką $\tilde{\gamma}$ na \tilde{X} odpowiada jednokrotnemu przejściu pętlą γ na X .

Mianowicie, na początku $\tilde{\gamma}(0)$ ustalamy dwuwymiarową orientację w otoczeniu $\tilde{\gamma}(0)$ oraz rzutujemy to otoczenie (wraz z orientacją) za pomocą odwzorowania $p : \tilde{X} \rightarrow X$ na zorientowane otoczenie punktu bazowego $x_0 \in X$. Po jednokrotnym przejściu ścieżką $\tilde{\gamma}$ do $\tilde{\gamma}(1)$, znowu rzutujemy otoczenie $\tilde{\gamma}(1)$ (wraz z orientacją) na zorientowane otoczenie punktu x_0 . Możemy porównać tak otrzymane dwie dwuwymiarowe orientacje w otoczeniu punktu x_0 . Jeśli są takie same, to będziemy mówić, że $\tilde{\gamma}$ jest *ścieżką zachowującą orientację*, a jeśli nie — że jest *ścieżką zmieniającą orientację*.

Fakt 1.4.32. *Niech $p : \tilde{X} \rightarrow X$ będzie nakryciem nieparzystego stopnia $n = 2k + 1$. \tilde{X} jest powierzchnią nieorientowalną wtedy i tylko wtedy, gdy X jest powierzchnią nieorientowalną.*

Dowód. Niech α będzie pętlą na X zaczepioną w x_0 , a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jej podniesieniami na \tilde{X} , takimi że $\alpha_1(0) = \alpha_n(1) = \tilde{x}_0$ oraz $\alpha_i(1) = \alpha_{i+1}(0)$ dla $i = 1, 2, \dots, n - 1$, gdzie \tilde{x}_0 jest wybranym podniesieniem punktu x_0 .

W otoczeniu dowolnego podniesienia α_i możemy przyjąć orientację zgodną z orientacją w otoczeniu α . Stąd jeżeli α jest pętlą zachowującą orientację, to α_i jest ścieżką zachowującą orientację oraz dowolna ścieżka $\beta = \alpha_k \alpha_{k+1} \cdots \alpha_l$ dla pewnych $1 \leq k \leq l \leq n$ również zachowuje orientację (składa się ze zgodnie zorientowanych ścieżek zachowujących orientację). Zatem, przez kontrapozycję, jeżeli \tilde{X} jest nieorientowalna, to X też, niezależnie od tego czy n jest parzyste, czy nie.

Jeżeli \tilde{X} jest orientowalna to każda ścieżka β na \tilde{X} zachowuje orientację. Ponieważ β składa się z nieparzystej liczby ścieżek będących podniesieniami $p(\beta)$, to $p(\beta)$ również musi zachowywać orientację — w innym wypadku ścieżka β zmieniałaby orientację, jako ścieżka składająca się z nieparzystej liczby ścieżek, z których każdy zmieniałby orientację. \square

Inny dowód powyższego faktu można znaleźć w [17, Twierdzenie 3.1].

Rozdział 2

Grupy klas odwzorowań powierzchni

2.1 Definicja i Problem Realizacji Nielsena

Powierzchnie z nakłuciami $S_{g,n}^k$, $N_{g,n}^k$ nie są zwarte, jednak będziemy traktować je jak zwarte powierzchnie $S_{g,n}$, $N_{g,n}$ ze zbiorem $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ wyróżnionych punktów z wnętrza $S_{g,n}$ lub $N_{g,n}$ odpowiednio.

Definicja 2.1.1. Niech X będzie zwartą i spójną powierzchnią topologiczną ze zbiorem Σ wyróżnionych punktów z wnętrza X . Grupą klas odwzorowań $\mathcal{M}(X)$ powierzchni X nazywamy grupę klas izotopii homeomorfizmów X zachowujących Σ i działających trywialnie na brzegu ∂X , przy czym gdy X jest orientowalna, ograniczamy się wyłącznie do dyfeomorfizmów zachowujących orientację. Jeżeli w przypadku powierzchni orientowalnej X rozpatrujemy wszystkie dyfeomorfizmy, również te zmieniające orientację, to mówimy o *rozszerzonej grupie klas odwzorowań powierzchni*, oznaczanej przez $\mathcal{M}^\pm(X)$.

Jeżeli przez $\text{Homeo}(X, \partial X)$ oznaczymy grupę homeomorfizmów X działających trywialnie na brzegu (i zachowujących orientację, jeśli X jest orientowalna), to

$$\mathcal{M}(X) = \text{Homeo}(X, \partial X) / \simeq,$$

gdzie \simeq oznacza relację izotopijności odwzorowań.

W dalszych częściach pracy zwykle nie będziemy odróżniać homeomorfizmu od jego klasy izotopii. Zauważmy, że zgodnie z powyższą definicją elementy grupy klas odwzorowań zachowują zbiór nakłuc, choć mogą permutować nakłucia wewnątrz niego, natomiast składowe brzegu są zachowywane punktowo. Podobnie izotopie działają trywialnie na składowych brzegu, ale mogą obracać otoczenie wokół nakłucia.

Równoważnie grupę klas odwzorowań możemy zdefiniować jako grupę klas izotopii

(zachowujących orientację w przypadku orientowalnym) dyfeomorfizmów X dla jakiegokolwiek struktury gładkiej na X [19, str. 47].

Istnieje silny związek pomiędzy skończonymi podgrupami grup klas odwzorowań powierzchni a skończonymi podgrupami ich grup homeomorfizmów. Opisuje go następujące twierdzenie, znane pod nazwą twierdzenia o problemie realizacji Nielsena (ang. *Nielsen Realisation Problem*):

Twierdzenie 2.1.2. [37, Twierdzenie 5, O realizacji Nielsena] *Niech X będzie zwartą powierzchnią orientowalną taką, że $\chi(X) < 0$. Każda skończona podgrupa $\mathcal{M}(X)$ może być zrealizowana jako podgrupa grupy homeomorfizmów X .*

W szczególności w dowolnej klasie odwzorowań f rzędu $n < \infty$ w $\mathcal{M}(X)$ istnieje homeomorfizm $f' : X \rightarrow X$, który jest rzędu n w $\text{Homeo}(X, \partial X)$, to znaczy $(f')^n = id_X$ („prawdziwa” równość, nie z dokładnością do izotopii). Pozwala to między innymi na stwierdzenie, że element $f \in \mathcal{M}(X)$ rzędu n indukuje nakrycie $X \rightarrow X / \langle f \rangle$ stopnia n (być może rozgałęzione, o czym więcej w Rozdziale 3). Jest to niewielkie nadużycie notacji, ponieważ w rzeczywistości mamy na myśli nakrycie n -krotne $X \rightarrow X / \langle f' \rangle$, gdzie f' jest homeomorfizmem rzędu n należącym do klasy odwzorowań f .

Metody używane w dowodzie Twierdzenia 2.1.2 pozwalają na rozszerzenie wyniku na przypadek nieorientowalny, korzystając z podwójnego nakrycia powierzchni N_g powierzchnią S_{g-1} (opisanego w Przykładzie 1.4.27), a także na przypadek powierzchni z osobliwościami takimi jak punkty stożkowe [36, str. 453 - 454].

2.2 Grupa klas odwzorowań podpowierzchni i metoda Alexandera

Niech X będzie powierzchnią, a $X' \subset X$ jej domkniętą podpowierzchnią. Załóżmy, że każda składowa brzegu $b \in \partial X'$ jest taka, że albo $b \in \partial X$, albo $b \cap \partial X = \emptyset$.

Uwaga 2.2.1. Każdą klasę odwzorowań z $\mathcal{M}(X')$ możemy reprezentować homeomorfizmem $f' \in \text{Homeo}(X', \partial X')$ stałym na $\partial X'$. Wówczas istnieje homeomorfizm $f \in \text{Homeo}(X, \partial X)$ będący rozszerzeniem f' , to znaczy $f = f'$ na X' oraz $f = id$ na $X \setminus X'$. Oznacza to, że istnieje kanoniczny różnowartościowy homomorfizm $i : \text{Homeo}(X', \partial X') \rightarrow \text{Homeo}(X, \partial X)$. Indukuje on homomorfizm $i_* : \mathcal{M}(X') \rightarrow \mathcal{M}(X)$ zdefiniowany jako $i_*(f') = f$. Homomorfizm i_* nie zawsze jest różnowartościowy, jednak znane jest przedstawienie jego jądra $\ker i_*$ [54, Twierdzenie 4.1 – przypadek orientowalny], [64, Twierdzenie 3.6 – przypadek nieorientowalny]. Podgrupy $\mathcal{M}(X)$ postaci $i_*(\mathcal{M}(X'))$ nazywamy *podgrupami geometrycznymi*. Niekiedy mówi się, że i_* jest indukowany przez włożenie $X' \hookrightarrow X$, a nie monomorfizm $\text{Homeo}(X', \partial X') \rightarrow \text{Homeo}(X, \partial X)$.

Każda powierzchnia zawiera podpowierzchnię homeomorficzną z dyskiem, dlatego zaczniemy od dowodu trywialności grupy klas odwzorowań dysku.

Lemat 2.2.2. [19, Lemat 2.1, Alexander] *Grupa klas odwzorowań dysku jest trywialna.*

Dowód. Oznaczmy $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Niech $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ będzie dowolnym homeomorfizmem takim, że $f|_{\partial\mathbb{D}} = id_{\partial\mathbb{D}}$. Dla $t \in [0, 1)$ definiujemy rodzinę homeomorfizmów

$$f_t(z) = \begin{cases} (1-t)f\left(\frac{z}{1-t}\right), & 0 \leq |z| < 1-t \\ z, & 1-t \leq |z| \leq 1 \end{cases}$$

oraz przyjmujemy $f_1 = id_{\mathbb{D}}$. Funkcja $F(z, t) = f_t(z)$ jest ciągła jako funkcja dwóch zmiennych, zatem $\{f_t\}_{t \in [0, 1]}$ jest homotopią łączącą $f = f_0$ z $id = f_1$. \square

Wniosek 2.2.3. *Grupa klas odwzorowań dysku z nakłuciem jest trywialna.*

Dowód. Wystarczy założyć, że nakłucie $p = 0 \in \mathbb{D}$. \square

Lemat Alexandra wykorzystuje się między innymi do obliczania grup klas odwzorowań bardziej skomplikowanych powierzchni oraz dowodzenia relacji, które zachodzą w $\mathcal{M}(X)$. Ogólny schemat polega na tym, aby za pomocą rodziny okręgów i łuków \mathcal{C} podzielić powierzchnię X na części homeomorficzne z dyskiem lub dyskiem z nakłuciem, a następnie do każdej z części zastosować lemat Alexandra (Lemat 2.2.2).

Definicja 2.2.4. Mówimy, że rodzina $\mathcal{C} = \{\gamma_i\}_{1 \leq i \leq n}$ okręgów i łuków na powierzchni S wypełnia S , gdy powierzchnia $S \setminus \mathcal{C}$ powstała przez rozcięcie S wzdłuż wszystkich γ_i jest rozłączną sumą dysków oraz dysków z jednym nakłuciem.

Twierdzenie 2.2.5. [19, Stwierdzenie 2.8, Metoda Alexandra] *Niech S będzie zwartą powierzchnią ze skończoną liczbą punktów wyróżnionych. Niech $f : S \rightarrow S$ będzie zachowującym orientację homeomorfizmem działającym trywialnie na brzegu ∂S , a $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ rodziną istotnych okręgów i łuków na S takich, że*

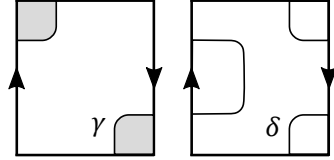
- γ_i są parami w pozycji minimalnej,
- γ_i są parami nieizotopijne,
- dla różnych i, j, k co najmniej jeden ze zbiorów $\gamma_i \cap \gamma_j, \gamma_i \cap \gamma_k, \gamma_j \cap \gamma_k$ jest pusty,
- istnieje permutacja σ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ taka, że dla każdego i okrąg/łuk $f(\gamma_i)$ jest izotopijny relatywnie względem ∂S z $\gamma_{\sigma(i)}$.

Ostatni warunek implikuje, że $f(\bigcup \gamma_i)$ jest izotopijny z $\bigcup \gamma_i$ relatywnie względem ∂S . Możemy traktować $\bigcup \gamma_i$ jako graf Γ na powierzchni S z wierzchołkami w punktach przecięcia okręgów/łuków oraz na końcach łuków. Wówczas złożenie f z izotopią pomiędzy $f(\bigcup \gamma_i)$ a $\bigcup \gamma_i$ indukuje automorfizm f_* grafu Γ .

Przypuśćmy, że $\{\gamma_i\}$ wypełnia S . Jeżeli automorfizm f_* zachowuje wszystkie wierzchołki oraz krawędzie Γ , to f jest izotopijny z identycznością na S . W przeciwnym wypadku istnieje nietrywialna potęga f , która jest izotopijna z identycznością na S .

Wniosek 2.2.6. [16, Twierdzenie 3.4] *Grupa klas odwzorowań wstęgi Möbiusa jest trywialna.*

Dowód. Ustalmy $f \in \mathcal{M}(N_g)$. Niech α będzie właściwie zanurzoną łukiem nierozdzielającym na wstędze Möbiusa M , to znaczy $\alpha \cap \partial M = \partial\alpha = \{\alpha(0), \alpha(1)\}$. Ponieważ f zachowuje brzeg ∂M punktowo, to $f(\alpha) \cap \partial M = \{\alpha(0), \alpha(1)\}$. Ponadto $f(\alpha)$ również jest nierozdzielający.

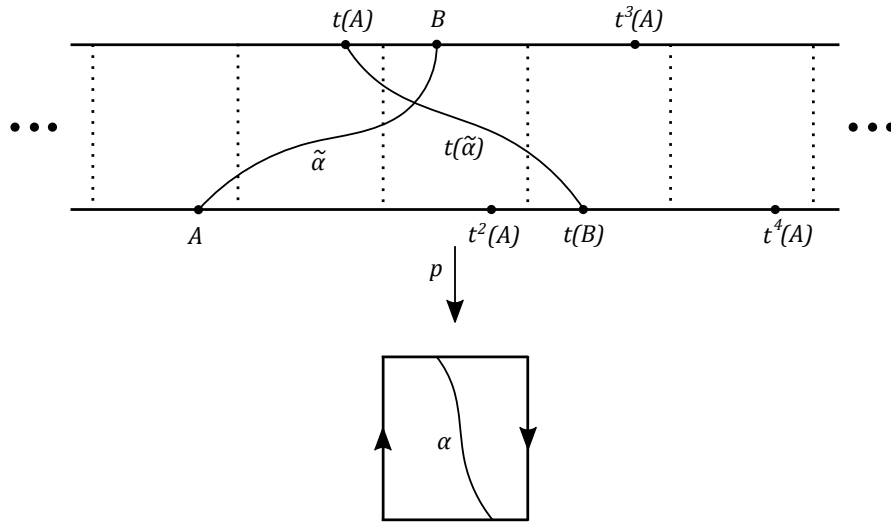


Rysunek 2.1: Łuki na wstędze Möbiusa. Łuk γ jest rozdzielający, a łuk δ jest nierozdzielający.

Powierzchnia $M \setminus \alpha$ jest dyskiem, zatem aby wykazać, że f jest izotopijny z identycznością, wystarczy pokazać, że $f(\alpha)$ jest izotopijny z α relatywnie względem ∂M , ponieważ wówczas jednoelementowy zbiór $\{\alpha\}$ spełnia założenia Metody Alexandra (Twierdzenie 2.2.5).

Wstęgę Möbiusa można przedstawić jako przestrzeń ilorazową działania grupy $\langle t_1 \rangle \cong \mathbb{Z}$ na $\widetilde{M} = \mathbb{R} \times [-1, 1]$, gdzie $t_n(x, y) = (x + n, (-1)^n y)$. Odwzorowanie $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ jest nakryciem uniwersalnym. Oznaczmy generator t_1 przez t .

Podniesienie $\tilde{\alpha}$ łuku α na \widetilde{M} jest łukiem takim, że $\tilde{\alpha} \cap \partial\widetilde{M} = \partial\tilde{\alpha}$. Oznaczmy jego końce przez A, B . Ponieważ $\text{Aut}(p) = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$, więc bez straty ogólności można założyć, że B leży pomiędzy $t^{2r-1}(A)$ a $t^{2r+1}(A)$ dla $r \geq 0$. Pokażemy, że $r = 0$.



Rysunek 2.2: Podnoszenie łuków ze wstęgi Möbiusa na nakrycie uniwersalne.

Jeżeli $r > 0$, to łuk $\tilde{\alpha}$ rozdziela \widetilde{M} w taki sposób, że $t(A)$ i $t^{2r}(A)$ są w różnych składowych spójności, a więc $t(A)$ i $t(B)$ są w różnych składowych spójności. Jednak wiemy, że łuk $t(\tilde{\alpha})$ łączy $t(A)$ z $t(B)$ w $\widetilde{M} \setminus \tilde{\alpha}$, zatem otrzymujemy sprzeczność. Przypadek $r = 1$ został przedstawiony na Rysunku 2.2

Oznacza to, że każdy nierozdzielający łuk β na M taki, że $\beta \cap \partial M = \partial\beta = \partial\alpha$ jest izotopijny z α za pomocą izotopii stałej na końcach $\partial\alpha = \partial\beta$, a więc i $f(\alpha)$ jest izotopijny z α za pomocą izotopii stałej na $\partial\alpha$. \square

2.3 Skręcenia Dehna

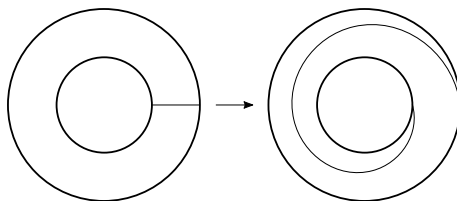
Bardzo szczególnym przykładem klas odwzorowań są skręcenia Dehna. Rozważmy następujący pierścień kołowy w \mathbb{R}^2

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\} = \{(\theta, s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta < 2\pi, 1 \leq s \leq 2\}$$

oraz przyjmijmy orientację indukowaną z \mathbb{R}^2 . Niech $t : A \rightarrow A$ będzie (prawym) skręceniem w pierścieniu A danym wzorem we współrzędnych biegunowych:

$$t(\theta, s) = (\theta - 2\pi s, s).$$

Wówczas t jest zachowującym orientację homeomorfizmem, który punktowo zachowuje ∂A (Rysunek 2.3). Lewe skręcenie definiujemy jako $t(\theta, s) = (\theta + 2\pi s, s)$. W niniejszej pracy, na orientowalnych (pod)powierzchniach, będziemy operowali wyłącznie prawymi skręczeniami Dehna, chyba że zaznaczono inaczej.

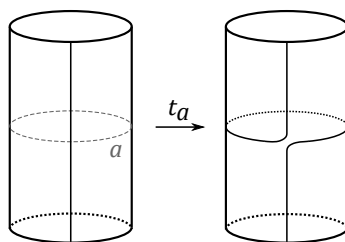


Rysunek 2.3: Skręcenie w pierścieniu w \mathbb{R}^2 .

Definicja 2.3.1. Niech a będzie okręgiem dwustronnym na powierzchni X , U jego zorientowanym otoczeniem regularnym homeomorficznym z pierścieniem A . Niezależnie od tego czy X jest orientowalna, czy nie, U jest orientowalną podpowierzchnią, zatem można wybrać zachowujący orientację homeomorfizm $\phi : A \rightarrow U$. Prawym *skręceniem Dehna* t_a wzdłuż okręgu a nazywamy homeomorfizm $t_a : X \rightarrow X$ zdefiniowany wzorem:

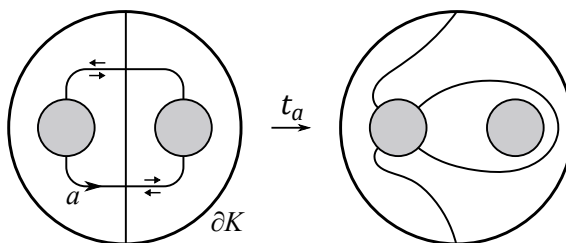
$$t_a(x) = \begin{cases} \phi t \phi^{-1}(x) & \text{dla } x \in U \\ x & \text{dla } x \in X \setminus U. \end{cases}$$

Klasa izotopii homeomorfizmu t_a nie zależy od wyboru otoczenia regularnego U okręgu a , orientacji a , ani homeomorfizmu ϕ , zależy natomiast od lokalnej orientacji powierzchni w otoczeniu regularnym U [53, Stwierdzenie 9]. Na powierzchni orientowalnej S można globalnie ustalić orientację S , więc orientacja każdego otoczenia regularnego okręgu a jest jednoznacznie



Rysunek 2.4: Skręcenie Dehna wzdłuż okręgu dwustronnego.

zdefiniowana (indukowana z orientacji S), a stąd element t_a jest dobrze określony. Jednak na powierzchni nieorientowalnej N skręcenie Dehna t_a zależy od wyboru orientacji w otoczeniu regularnym a . Nie wyróżniamy zatem prawych i lewych skręceń Dehna, a jedynie zaznaczamy wybraną lokalną orientację w otoczeniu a przez wskazanie strzałkami kierunku skręcenia, tak jak zostało to przedstawione na Rysunku 2.5).



Rysunek 2.5: Skręcenie Dehna na butelce Kleina z dziurą. Zaciemnienie dysku reprezentuje wklejoną wstęgę Möbiusa.

Uwaga 2.3.2. Skręcenia Dehna definiujemy wyłącznie względem okręgów dwustronnych.

Fakt 2.3.3. [53, Lemat 12] *Jeżeli okrąg istotny a na powierzchni X ogranicza wstęgę Möbiusa, dysk lub dysk z jednym nakłuciem, to $t_a = 1$.*

Dowód. Niech $A = S^1 \times [0, 1]$ będzie pierścieniem, a t prawym skręceniem w A . Oznaczmy przez $\phi : A \rightarrow X$ włożenie A w powierzchnię X takie, że $U = \phi(A)$ jest otoczeniem regularnym okręgu a . Niech $\phi_U : A \rightarrow U$ będzie homeomorfizmem będącym ograniczeniem ϕ do obrazu. Wtedy $t_a = \phi_U t \phi_U^{-1}$, ale równoważnie możemy napisać $t_a = \phi_*(t)$, gdzie ϕ_* oznacza homomorfizm indukowany przez włożenie $\phi : A \rightarrow X$, zgodnie z Uwagą 2.2.1.

Jeżeli a ogranicza wstęgę Möbiusa, to na powierzchni X istnieje podpowierzchnia M homeomorficzna ze wstęgą Möbiusa taka, że $U \subset M$. Niech $i : M \hookrightarrow X$ będzie włożeniem. Oznaczmy przez $\phi_M : A \rightarrow M$ ograniczenie ϕ do M . Wtedy $\phi = i \phi_M$, a więc $\phi_* = i_* \phi_{M*}$. Ponieważ grupa klas odwzorowań wstęgi Möbiusa jest trywialna (Wniosek 2.2.6), to $t_a = \phi_{M*}(t) = 1$ w $\mathcal{M}(M)$, więc w $\mathcal{M}(X)$ zachodzi

$$t_a = \phi_*(t) = i_*((\phi_{M*}(t))) = i_*(1) = 1.$$

W analogiczny sposób dowodzi się trywialności skręcenia Dehna względem okręgu ograniczającego dysk lub jednokrotnie nakłuty dysk, korzystając z trywialności grup klas odwzorowań $\mathcal{M}(S_{0,1})$ (Lemat 2.2.2) i $\mathcal{M}(S_{0,1}^1)$ (Wniosek 2.2.3). \square

Fakt 2.3.4. [63, Stwierdzenie 4.6] *Niech a, b będą dwustronnymi istotnymi okręgami na powierzchni X , a t_a, t_b prawymi skręczeniami Dehna względem pewnych ustalonych orientacji otoczeń regularnych okręgów a, b . Wówczas*

$$t_a = t_b^{\pm 1} \iff a = b.$$

Uwaga 2.3.5. Potęga po lewej stronie równoważności w Fakcie 2.3.4 zależy od tego, czy orientacje otoczeń regularnych okręgów a i b są zgodne. Przypominamy, że okręgi definiujemy jako **obrazy** odwzorowań ciągłych $S^1 \rightarrow X$, a więc w szczególności są one niezorientowane, dlatego po prawej stronie równoważności otrzymujemy $a = b$.

Fakt 2.3.6. [19, Fakt 3.7] *Dla każdego $f \in \mathcal{M}(X)$ i każdego okręgu dwustronnego a na X zachodzi:*

$$t_{f(a)} = ft_a f^{-1},$$

przy założeniu, że dla ustalonej lokalnej orientacji w otoczeniu regularnym U_a okręgu a w otoczeniu regularnym $U_{f(a)}$ okręgu $f(a)$ przyjmujemy orientację indukowaną przez f z otoczenia U_a , to znaczy zgodną z orientacją $f(U_a)$.

Dowód. Jeżeli X jest orientowalna i f zachowuje orientację, to f^{-1} przekształca otoczenie regularne okręgu $f(a)$ w otoczenie regularne okręgu a , zachowując orientację. Następnie t_a skręca otoczenie okręgu a , a f przekształca z powrotem skręcone otoczenie okręgu a w skręcone otoczenie okręgu $f(a)$ – znowu zachowując orientację – stąd wynikiem jest skręcenie wzdłuż okręgu $f(a)$.

Jeżeli X jest nieorientowalna, to o ile dla ustalonej orientacji otoczenia regularnego U_a w otoczeniu regularnym $U_{f(a)}$ przyjmujemy orientację indukowaną przez f , homeomorfizm f^{-1} przekształca $U_{f(a)}$ na U_a z orientacją zgodną z początkowo ustaloną, następnie t_a skręca otoczenie U_a tak, jak wskazuje wybrana lokalna orientacja, oraz f przekształca skręcone otoczenie U_a w otoczenie $U_{f(a)}$ w taki sposób, że otrzymane ostatecznie skręcenie względem okręgu $f(a)$ następuje w kierunku zgodnym z orientacją indukowaną przez f z otoczenia U_a . \square

Wniosek 2.3.7. *W grupie klas odwzorowań $\mathcal{M}(S_g)$ powierzchni orientowalnej S_g wszystkie skręcenia Dehna względem okręgów nierozdzielających są sprzężone.*

W grupie klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_g)$ powierzchni nieorientowalnej N_g istnieje jedna (gdy g jest nieparzyste) lub dwie (gdy g jest parzyste) klasy sprzężoności skręceń Dehna względem okręgów nierozdzielających.

Dowód. Jeżeli okręgi a, b na powierzchni X są topologicznie równoważne, to istnieje homeomorfizm $\phi : X \rightarrow X$ taki, że $\phi(a) = b$, a więc z Faktu 2.3.6 zachodzi $t_b = t_{\phi(a)} = \phi t_a \phi^{-1}$, to znaczy skręcenia Dehna t_a, t_b są sprzężone w grupie klas odwzorowań przez klasę izotopii homeomorfizmu ϕ .

Na powierzchniach orientowalnych wszystkie okręgi nierozdzielające są topologicznie równoważne (Wniosek 1.2.13), stąd wszystkie skręcenia Dehna względem okręgów nierozdzielających są sprzężone w $\mathcal{M}(S_g)$. Podobnie jest w $\mathcal{M}(N_g)$, gdy g jest nieparzyste, ponieważ wówczas również występuje tylko jeden typ topologiczny okręgów dwustronnych na N_g (Tabela 1.1). Na powierzchniach nieorientowalnych parzystego rodzaju istnieją dwa nierównoważne topologicznie typy nierozdzielających okręgów dwustronnych (wymienione w Tabeli 1.1). W grupach klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_g)$, gdy g jest parzyste, wyróżniamy więc dwie klasy sprzężoności skręceń Dehna względem okręgów nierozdzielających. Jedna składa się ze skręceń t_a względem okręgów takich, że $N_g \setminus a = N_{g-2,2}$, a druga ze skręceń t_b takich, że $N_g \setminus b = S_{\frac{g-2}{2},2}$. \square

Wniosek 2.3.8. *Badanie istnienia pierwiastków danego stopnia n ze skręceń Dehna względem okręgów nierozdzielających w $\mathcal{M}(S_g)$ można ograniczyć do badania istnienia pierwiastka stopnia n z jednego takiego skręcenia Dehna w $\mathcal{M}(S_g)$.*

Tak samo jest w przypadku nieorientowalnym gdy g jest nieparzyste, natomiast jeżeli g jest parzyste, to należy rozpatrywać dwa osobne przypadki: skręcenia Dehna względem okręgów nierozdzielających, których dopełnienie jest powierzchnią nieorientowalną i względem okręgów nierozdzielających, których dopełnienie jest powierzchnią orientowalną.

Dowód. Gdy okręgi a, b na powierzchni X są topologicznie równoważne, to $t_b = \phi t_a \phi^{-1}$ dla pewnego $\phi \in \mathcal{M}(X)$ (Wniosek 2.3.7). Wówczas jeśli f jest pierwiastkiem stopnia n z t_a , to $\phi f \phi^{-1}$ jest pierwiastkiem stopnia n z t_b . \square

Wniosek 2.3.9. *Jeżeli f jest pierwiastkiem stopnia n ze skręcenia Dehna t_a , to $f(a) = a$.*

Dowód. Jeżeli f jest pierwiastkiem stopnia n z t_a w grupie klas odwzorowań $\mathcal{M}(X)$, to $f^n = t_a$. Klasa izotopii f generuje cykliczną podgrupę rzędu n w $\mathcal{M}(X)$. Ponieważ każda grupa cykliczna jest abelowa, to f jest przemienny ze wszystkimi swoimi potęgami, w szczególności z t_a , zatem Fakt 2.3.6 implikuje

$$t_{f(a)} = f t_a^{\pm 1} f^{-1} = f f^{-1} t_a^{\pm 1} = t_a^{\pm 1}.$$

Z Faktu 2.3.4 wynika, że $f(a) = a$. Potęga ± 1 przy t_a wynika stąd, że tym razem nie zakładamy, że w otoczeniu regularnym okręgu $f(a)$ przyjmujemy orientację indukowaną przez f z otoczenia regularnego okręgu a . \square

Wniosek 2.3.10. [19, Fakt 3.8] *Dla każdego $f \in \mathcal{M}(X)$ i każdego okręgu dwustronnego a na X zachodzi*

$$f t_a = t_a f \Leftrightarrow f(a) = a.$$

Jeżeli X jest nieorientowalna, to f zachowuje okrąg a jako (nieorientowany) zbiór, choć może zmieniać orientację w otoczeniu a .

Dowód.

$$f t_a = t_a f \Leftrightarrow f t_a f^{-1} = t_a \stackrel{\text{Fakt 2.3.6}}{\Leftrightarrow} t_{f(a)} = t_a \stackrel{\text{Fakt 2.3.4}}{\Leftrightarrow} f(a) = a$$

□

Fakt 2.3.11. [19, Stwierdzenie 3.2] Jeżeli a, b są okręgami na powierzchni orientowalnej S oraz k jest dowolną liczbą całkowitą, to

$$i(t_a^k(b), b) = |k|i(a, b)^2.$$

Fakt 2.3.12. [63, Stwierdzenie 3.14] Jeżeli a, b są okręgami na powierzchni nieorientowalnej N oraz k jest dowolną liczbą całkowitą, to

$$i(t_a^k(b), b) \geq i(a, b),$$

$$i(t_a^k(b), b) \geq (k-1)^2 i(a, b)^2 + 2i(a, b) - 2.$$

Wniosek 2.3.13. Jeżeli a jest okręgiem generycznym na powierzchni X , to skręcenie t_a jest elementem nieskończonego rzędu w $\mathcal{M}(X)$.

Wniosek 2.3.14. [19, Fakt 3.9] Niech a, b będą okręgami dwustronnymi na powierzchni X . Wtedy

$$i(a, b) = 0 \iff t_a(b) = b \iff t_a t_b = t_b t_a$$

Dowód. Równoważność drugiego i trzeciego stwierdzenia jest oczywista na mocy Faktu 2.3.10. Jeżeli $i(a, b) = 0$, to $t_a(b) = b$, ponieważ skręcenie Dehna względem okręgu a działa nietrywialnie tylko w otoczeniu regularnym a , a więc w szczególności nie wpływa na okręgi rozłączne z a . Implikacja w drugą stronę wynika z tego, że jeżeli $t_a(b) = b$, to $i(t_a(b), b) = i(b, b) = 0$, a z drugiej strony w przypadku orientowalnym z Faktu 2.3.11 zachodzi

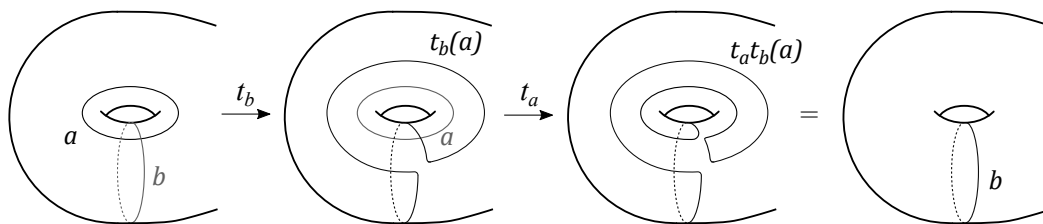
$$i(t_a(b), b) = i(a, b)^2,$$

stąd $i(a, b) = 0$. W przypadku nieorientowalnym (Fakt 2.3.12) otrzymujemy

$$0 = i(t_a(b), b) \geq i(a, b) \geq 0,$$

zatem $i(a, b) = 0$. □

Fakt 2.3.15. [19, Stwierdzenie 3.12] Jeżeli a, b są klasami izotopii okręgów spełniającymi $i(a, b) = 1$, to $t_a t_b(a) = b$.



Rysunek 2.6: Jeżeli $i(a, b) = 1$, to $t_a t_b(a) = b$.

Fakt 2.3.16. [19, Stwierdzenie 3.11, Relacja warkoczy] Niech a, b będą dwiema klasami izotopii okręgów dwustronnych takimi, że $i(a, b) = 1$. Wtedy

$$t_a t_b t_a = t_b t_a t_b.$$

Dowód. Zachodzi następujący ciąg implikacji i równoważności

$$\begin{aligned} i(a, b) = 1 &\stackrel{\text{Fakt 2.3.15}}{\implies} t_a t_b(a) = b \stackrel{\text{Fakt 2.3.4}}{\iff} t_{t_a t_b(a)} = t_b \stackrel{\text{Fakt 2.3.6}}{\iff} (t_a t_b) t_a (t_a t_b)^{-1} = t_b \\ &\iff (t_a t_b) t_a (t_a t_b)^{-1} = t_b \iff t_a t_b t_a = t_b t_a t_b. \quad \square \end{aligned}$$

Fakt 2.3.17. [19, Stwierdzenie 4.12, Relacja łańcucha] Dla liczby całkowitej $k > 0$ niech c_1, \dots, c_k będzie łańcuchem (klas izotopii) okręgów dwustronnych na (pod)powierzchni orientowalnej S . Weźmy reprezentanty γ_i klas c_i będące w położeniu minimalnym. Brzeg otoczenia regularnego sumy $\bigcup \gamma_i$ składa się z jednego (gdy k parzyste) lub dwóch (gdy k nieparzyste) okręgów dwustronnych. W przypadku k parzystego oznaczmy klasę izotopii tego okręgu przez d , a w przypadku k nieparzystego — klasy izotopii tych okręgów przez d_1, d_2 .

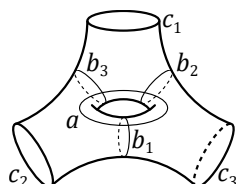
W $\mathcal{M}(S)$ zachodzą następujące relacje:

- $(t_{c_1} \dots t_{c_k})^{2k+2} = t_d$ oraz $(t_{c_1}^2 t_{c_2} \dots t_{c_k})^{2k} = t_d$, gdy k jest parzyste,
- $(t_{c_1} \dots t_{c_k})^{k+1} = t_{d_1} t_{d_2}$ oraz $(t_{c_1}^2 t_{c_2} \dots t_{c_k})^k = t_{d_1} t_{d_2}$, gdy k jest nieparzyste.

W Podrozdziale 3.4 pokażemy, że relacje te są konsekwencjami relacji definiujących obroty dysku z nakłuciami.

Relacje łańcucha są bardzo pomocne w konstruowaniu pierwiastków z elementów grup klas odwzorowań. W pracy [56] wykorzystywaliśmy je do dowodu istnienia pierwiastków z transpozycji i ślizgów wstęp Möbiusa w przypadku, gdy dopełnienie ich nośnika jest powierzchnią orientowalną rodzaju rodzaju $g \geq 1$ o jednej składowej brzegu. Relacje tę wykorzystał również Monden [47], konstruując pierwiastki stopnia 3 ze skręceń Dehna w grupie klas odwzorowań powierzchni orientowalnej. Inną relacją wykorzystywaną przez Mondena jest *relacja gwiazdy*.

Fakt 2.3.18. [23, Relacja gwiazdy] Niech c_1, c_2, c_3 będą trzema składowymi brzegu powierzchni orientowalnej $S_{1,3}$. Niech b_1, b_2, b_3 oraz a będą okręgami na $S_{1,3}$ takimi, jak przedstawiono na Rysunku 2.7. Wtedy



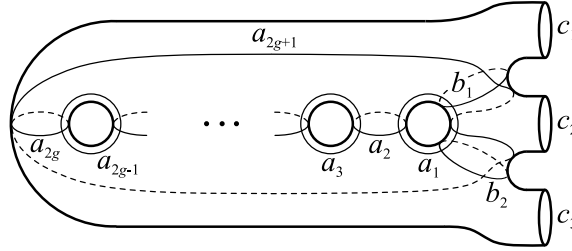
Rysunek 2.7: Okręgi na $S_{1,3}$ definiujące relację gwiazdy.

$$(t_{b_1} t_{b_2} t_{b_3} t_a)^3 = t_{c_1} t_{c_2} t_{c_3}.$$

Wspólnym uogólnieniem relacji gwiazdy i relacji łańcucha jest następująca *relacja trójzębu*.

Fakt 2.3.19. [Relacja trójzębu] Niech $b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, a_1, a_2, \dots, a_{2g}$ oznaczają okręgi na powierzchni orientowalnej $S_{g,3}$ rodzaju $g \geq 1$ z trzema składowymi brzegu takie, jak przedstawiono na Rysunku 2.8. Wtedy

$$(t_{b_1} t_{b_2} t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}})^{2g+1} = t_{c_1} t_{c_2}^g t_{c_3}.$$

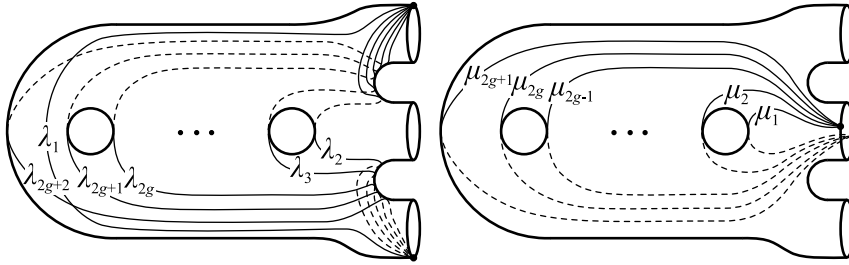


Rysunek 2.8: Okręgi definiujące relację trójzębu.

Dowód. Oznaczmy $T = t_{b_1} t_{b_2} t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}}$ oraz niech a_{2g+1} będzie okręgiem takim jak na Rysunku 2.8. Zauważmy, że dla $k = 1, 2, \dots, 2g$ zachodzi $T(a_k) = a_{k+1}$ oraz $T(a_{2g+1}) = a_1$. Stąd

$$T^{2g+1}(a_k) = a_k = t_{c_1} t_{c_2}^g t_{c_3}(a_k), \text{ dla } k = 1, 2, \dots, 2g. \quad (2.1)$$

Niech $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2g+2}$ oraz $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2g+1}$ będą łukami, takimi jak przedstawiono na Rysunku 2.9. Wtedy dla $k = 1, 2, \dots, 2g+1$ zachodzi $T(\lambda_k) = \lambda_{k+1}$, więc



Rysunek 2.9: Łuki λ_i oraz μ_i – dowód relacji trójzębu.

$$T^{2g+1}(\lambda_1) = \lambda_{2g+2} = t_{c_1} t_{c_2}^g t_{c_3}(\lambda_1). \quad (2.2)$$

W przypadku łuków μ_k jest nieco inaczej. Oznaczmy przez H półskręcenie względem okręgu c_2 , to znaczy element taki, że $H^2 = t_{c_2}$. Wówczas dla $k = 1, 2, \dots, 2g$ zachodzi $H^{-1}T(\mu_k) = \mu_{k+1}$, oraz $T(\mu_{2g+1}) = \mu_1$. Stąd

$$\begin{aligned} T(H^{-1}T)^{2g}(\mu_1) &= \mu_1, \\ T^{2g+1}(\mu_1) &= H^{2g}(\mu_1) = t_{c_2}^g(\mu_1) = t_{c_1} t_{c_2}^g t_{c_3}(\mu_1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Równania (2.1), (2.2) i (2.3) implikują, że T^{2g+1} i $t_{c_1} t_{c_2}^g t_{c_3}$ działają tak samo na wszystkich okręgach

i łukach ze zbioru

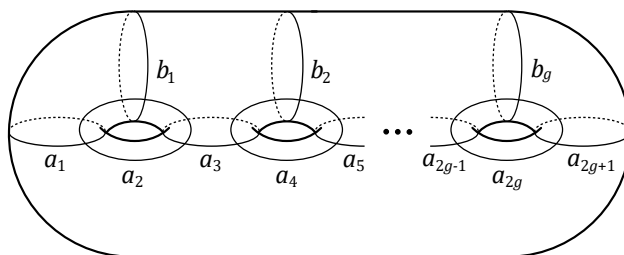
$$\mathcal{C} = \{a_1, a_2, \dots, a_{2g}, \lambda_1, \mu_1\}.$$

Ponieważ zbiór \mathcal{C} spełnia założenia metody Alexandera (Twierdzenie 2.2.5), to $T^{2g+1} = t_{c_1} t_{c_2}^g t_{c_3}$. \square

W Podrozdziale 3.4 pokażemy, jak relacje łańcucha oraz trójzębu można wyprowadzić, korzystając z podniesienia odpowiednich obrotów dysku lub pierścienia z nakłuciami na powierzchnię $S_{g,1}$, $S_{g,2}$ lub $S_{g,3}$. Metoda ta pozwoli na łatwe określenie liczby punktów stałych odwzorowań postaci $t_{c_1} t_{c_2} \dots t_{c_n}$, $t_{c_1}^2 t_{c_2} \dots t_{c_n}$ i $t_{b_1} t_{b_2} t_{a_1} t_{a_2} \dots t_{a_{n-1}}$ na odpowiednich podpowierzchniach, z czego będziemy korzystać podczas przyporządkowywania sygnatury danemu pierwiastkowi ze skręcenia Dehna.

Jednym z powodów, dla którego skręcenia Dehna są niezwykle ważne w teorii grup klas odwzorowań, jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.3.20. [42] *Dla $g \geq 0$ grupa $\mathcal{M}(S_g)$ jest generowana przez skończoną liczbę skręceń Dehna względem okręgów nierozdzielających.*



Rysunek 2.10: Okręgi nierozdzielające na S_g , wzdłuż których skręcenia Dehna generują $\mathcal{M}(S_g)$.

Początkowo w latach 20-tych XX wieku Dehn [14] udowodnił, że $\mathcal{M}(S_g)$ jest generowana przez $2g(g-1)$ skręceń. Następnie Mumford [48] pokazał, że w zbiorze generującym wystarczy zawrzeć wyłącznie skręcenia względem okręgów nierozdzielających. Lickorish [40, 42] dowiódł, że potrzeba $3g-1$ skręceń Dehna wzdłuż okręgów nierozdzielających (zgodnie z oznaczeniem na Rysunku 2.10 generatory Lickorisha to $t_{a_1}, t_{a_2}, \dots, t_{a_{2g+1}}, t_{b_2}, t_{b_3}, \dots, t_{b_{g-1}}$). Pod koniec lat 70-tych Humphries [30] wykazał, że aby wygenerować $\mathcal{M}(S_g)$ wystarczy $2g+1$ skręceń Dehna (zgodnie z oznaczeniem na Rysunku 2.10: $t_{a_1}, t_{a_2}, \dots, t_{a_{2g}}, t_{b_2}$), a ponadto dowolny zbiór generatorów $\mathcal{M}(S_g)$ składający się wyłącznie ze skręceń Dehna, musi składać się z co najmniej $2g+1$ elementów. Pełne przedstawienie wykorzystujące generatory Humphriesa podał Wajnryb [68].

W 2009 roku opublikowano zaskakującą pracę Margalita i Schleimera [45], której głównym wynikiem jest dowód następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2.3.21. [45] *Jeżeli $g \geq 2$, to każde skręcenie Dehna w $\mathcal{M}(S_g)$ ma nietrywialny pierwiastek.*

Dowód ma charakter konstrukcyjny: dla $g \geq 1$ skonstruowano pierwiastek stopnia $2g+1$ ze skręcenia Dehna względem okręgu nierozdzielającego w grupie klas odwzorowań $\mathcal{M}(S_{g+1})$

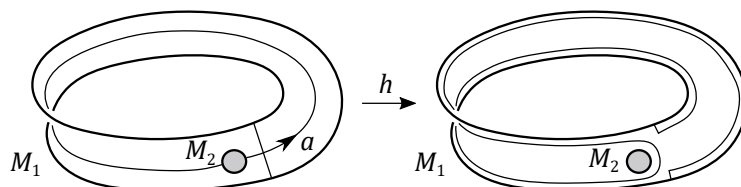
powierzchni orientowalnej rodzaju $g + 1$. Istnienie pierwiastka ze skręcenia Dehna t_a względem istotnego okręgu rozdzielającego a jest oczywiste – obrót jednej składowej spójności $S_{g+1} \setminus a$ o kąt π daje pierwiastek stopnia 2 z t_a .

W kolejnych latach McCullough, Rajeevsarathy i Monden [46, 47] badali istnienie innych pierwiastków ze skręceń Dehna w $\mathcal{M}(S_g)$ oraz wykazali, że te skonstruowane przez Margalita i Schleimera są maksymalnego stopnia [46, Wniosek 2.2]. Udowodnili również, że skręcenie Dehna względem okręgu nierozdzielającego na powierzchni orientowalnej $S_g + 1$ ma pierwiastek stopnia n , jeżeli n jest liczbą nieparzystą oraz $g + 1 > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ [46, Wniosek 4.1]. W szczególności pierwiastki stopnia 3 istnieją, o ile $g + 1 \geq 2$. Jawne wzory na pierwiastki stopnia 3 przedstawił Monden [47, Sekcja 4], korzystając z relacji łańcucha oraz relacji gwiazdy między skręceniami Dehna (Fakty 2.3.17, 2.3.18). Zauważmy, że udowodniona w tej pracy (Fakt 2.3.19) i w [57] relacja trójzębu umożliwia uogólnienie konstrukcji Mondena na przypadek pierwiastków dowolnego nieparzystego stopnia n (które istnieją o ile g jest dostatecznie duże).

Pierwiastkom ze skręceń Dehna w grupie klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej – głównemu tematowi niniejszej pracy – poświęcone są Rozdziały 4 i 5.

2.4 Generatory grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej

Skręcenia Dehna nie generują całej grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej rodzaju $g \geq 2$, lecz jej podgrupę indeksu 2 [41, Twierdzenie 1]. Brakujący generator wprowadził Lickorish i nazwał go Y -homeomorfizmem [41, str. 313].



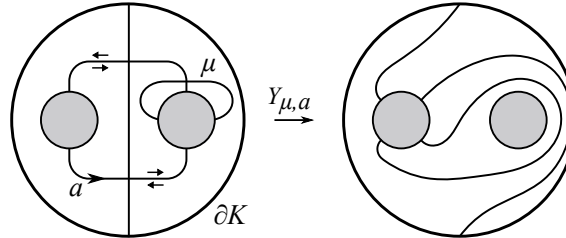
Rysunek 2.11: Ślizg wstęgi Möbiusa M_2 wzdłuż okręgu dwustronnego a .

Niech K oznacza powierzchnię $N_{2,1}$, czyli butelkę Kleina z dziurą. Można o niej myśleć jak o powierzchni otrzymanej ze wstęgi Möbiusa M_1 przez wycięcie z niej wnętrza dysku i utożsamienie punktów na tak powstałej składowej brzegu za pomocą odwzorowania antypodycznego, czyli wklejenie drugiej wstęgi Möbiusa M_2 . Niech $h : K \rightarrow K$ będzie homeomorfizmem K , który ślizga M_2 jednokrotnie wzdłuż rdzenia wstęgi Möbiusa M_1 . Efekt działania h na K przedstawiono na Rysunku 2.11. Zwróćmy uwagę, że okrąg a , wzdłuż którego ślizgamy M_2 , jest dwustronny, ponieważ przechodzi przez dwie wstęgi Möbiusa, M_1 i M_2 .

Definicja 2.4.1. Niech N będzie powierzchnią nieorientowalną rodzaju $g \geq 2$, a K butelką Kleina z dziurą zanurzoną w N . Homeomorfizm $h : K \rightarrow K$ indukuje homeomorfizm $\bar{h} : N \rightarrow N$, gdzie

$\bar{h}|_K = h$ oraz $\bar{h}|_{N \setminus K} = id$. Każdy homeomorfizm N izotopijny z \bar{h} nazywamy Y -homeomorfizmem powierzchni N .

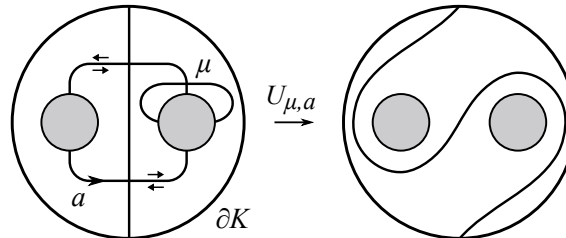
Obecnie w literaturze Y -homeomorfizm występuje częściej pod nazwą *ślizgu wstęgi Möbiusa* (ang. *crosscap slide*). Inny sposób reprezentowania go został przedstawiony na Rysunku 2.12.



Rysunek 2.12: Ślizg wstęgi Möbiusa. Zaciemniony dysk reprezentuje wklejoną wstęgę Möbiusa. Oznaczenie $Y_{\mu, a}$ oznacza, że ślizgamy jednokrotnie wstęgę Möbiusa, wyznaczoną przez okrąg jednostronny μ , wzdłuż okręgu dwustronnego a .

Twierdzenie 2.4.2. [41, Twierdzenie 2] *Grupa klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_g)$ powierzchni nieorientowalnej jest generowana przez skręcenia Dehna i Y -homeomorfizmy.*

Później zamiast ślizgu wstęgi Möbiusa w zbiorze generującym zaczęto używać innego elementu zwanego *transpozycją wstęg Möbiusa*. Jest to element, który zamienia miejscami dwie wstęgi Möbiusa (Rysunek 2.13).



Rysunek 2.13: Transpozycja wstęg Möbiusa. Zaciemniony dysk reprezentuje wklejoną wstęgę Möbiusa.

Twierdzenie 2.4.3. [55, Twierdzenie 3.6] *$\mathcal{M}(N_g)$ jest generowana przez skręcenia Dehna i transpozycje wstęg Möbiusa.*

Zauważmy, że ślizg wstęgi Möbiusa $Y_{\mu, \alpha}$ można przedstawić jako złożenie transpozycji ze skręceniem Dehna względem krzywej α , tzn. $Y_{\mu, \alpha} = t_\alpha U_{\mu, \alpha}$ (oznaczenia zgodne z Rysunkami 2.12, 2.13). Ponadto jeżeli δ jest okręgiem na N_g ograniczającym butelkę Kleina z dziurą będącą nośnikiem transpozycji wstęg Möbiusa u lub ślizgu wstęg Möbiusa y , to w $\mathcal{M}(N_g)$ zachodzi:

$$u^2 = y^2 = t_\delta.$$

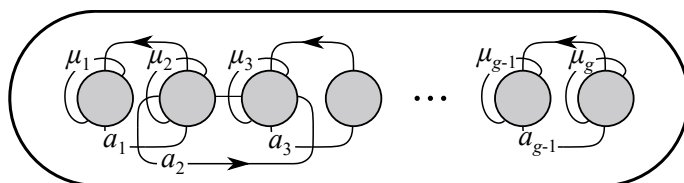
W szczególności pierwiastek stopnia n z u lub y jest pierwiastkiem stopnia $2n$ ze skręcenia Dehna t_δ względem okręgu rozdzielającego δ . Korzystaliśmy z tej obserwacji w [56], konstruując pierwiastki z transpozycji wstęg Möbiusa oraz ślizgów wstęg Möbiusa w $\mathcal{M}(N_g)$.

Twierdzenie 2.4.4. [39, Twierdzenie 1] *Jeżeli $g \geq 7$ i $n \geq 0$, to grupa klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_{g,n})$ jest generowana przez elementy sprzężone z jedną transpozycją wstęg Möbiusa lub jej odwrotnością.*

Powyższe twierdzenie sugeruje, że transpozycje wstęg Möbiusa mogą pełnić podobną rolę w $\mathcal{M}(N_g)$, jak skręcenia Dehna w $\mathcal{M}(S_g)$. W szczególności jest to pierwszy znany zbiór generujący $\mathcal{M}(N_g)$, który składa się z elementów jednego typu.

2.4.1 Relacje w $\mathcal{M}(N_g)$.

Powierzchnię N_g reprezentujemy jako sumę spójną g płaszczyzn rzutowych, lub równoważnie jako powierzchnię otrzymaną z wycięcia g dysków ze sfery, a następnie sklejenia powstałych w ten sposób składowych brzegu za pomocą odwzorowania antypodycznego, czyli wklejenia g wstęg Möbiusa (Rysunek 2.14). Numerujemy wstęgi Möbiusa od 1 do g i wprowadzamy następującą notację:



Rysunek 2.14: Powierzchnia nieorientowalna rodzaju g . Zaciemniony dysk reprezentuje wklejoną wstęgę Möbiusa.

- dla $i = 1, \dots, g$ niech μ_i będzie okręgiem jednostronnym przechodzącym jednokrotnie przez wstęgę Möbiusa z numerem i ,
- dla $i = 1, \dots, g-1$ niech a_i będzie okręgiem dwustronnym przechodzącym jednokrotnie przez wstęgę Möbiusa z numerem i oraz jednokrotnie przez wstęgę Möbiusa z numerem $i+1$,
- $u_i = U_{\mu_{i+1}, a_i}$ dla $i = 1, \dots, g-1$ (transpozycja i -tej i $i+1$ -wszej wstęgi Möbiusa),
- $y_i = Y_{\mu_{i+1}, a_i} = t_{a_i} u_i$ dla $i = 1, \dots, g-1$ (ślizg $i+1$ -wszego okręgu jednostronnego wzdłuż i -tego okręgu dwustronnego).

Paris i Szepietowski [55] wyprowadzili pełną prezentację grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej dowolnego rodzaju. Skorzystamy z kilku relacji, które zachodzą w $\mathcal{M}(N_g)$.

Fakt 2.4.5. [55, Twierdzenie 3.6] *W $\mathcal{M}(N_g)$ zachodzą (między innymi) następujące relacje:*

- $u_i u_j = u_j u_i$ dla $i, j = 1, \dots, g-1$, gdy $|i-j| > 1$ (przemienność transpozycji o rozłącznych nośnikach),

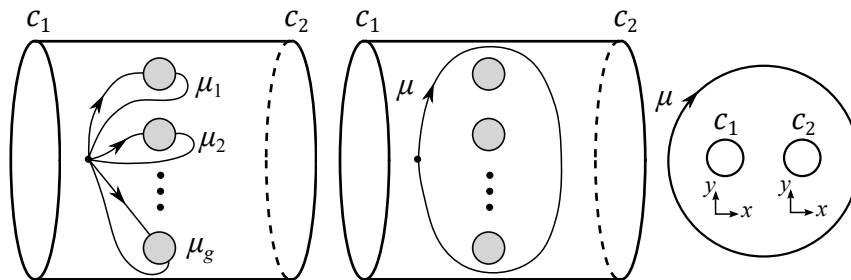
- $u_i u_{i+1} u_i = u_{i+1} u_i u_{i+1}$ dla $i, j = 1, \dots, g - 2$ (relacja warkocza),
- $(u_1 \dots u_{g-1})^g = 1$ (trywialność obrotu o kąt 2π na N_g),
- $(u_1^2 u_2 \dots u_{g-1})^{g-1} = 1$ (trywialność obrotu o kąt 2π , gdy jedna ze wstęg Möbiusa jest umieszczona w osi obrotu),
- $t_{a_i} u_j = u_j t_{a_i}$ dla $i, j = 1, \dots, g - 1$, gdy $|i - j| > 1$ (przemienność transpozycji i skręceń Dehna o rozłącznych nośnikach).

Uwaga 2.4.6. Jak wspomnieliśmy, na powierzchniach nieorientowalnych nie można globalnie ustalić orientacji, dlatego w otoczeniu regularnym każdego okręgu dwustronnego możemy wybrać ją dowolnie. W dalszych częściach pracy będziemy jednak stosować się do jednej konkretnej zasady, jeśli chodzi o orientację składowych brzegu powierzchni $N_{g,2}$, gdy g jest nieparzyste. Mianowicie, niech c_1, c_2 będą składowymi brzegu powierzchni $N_{g,2}$. Wybierzmy generatory grupy podstawowej $\pi_1(N_{g,2})$ tak, aby

$$\pi_1(N_{g,2}) = \left\langle c_1, c_2, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g \mid c_1 \left(\prod_{i=1}^g \mu_i^2 \right) c_2 \right\rangle$$

(c_1, c_2 to pętle homotopijne ze składowymi brzegu c_1, c_2 , jednak zaczepione w punkcie bazowym).

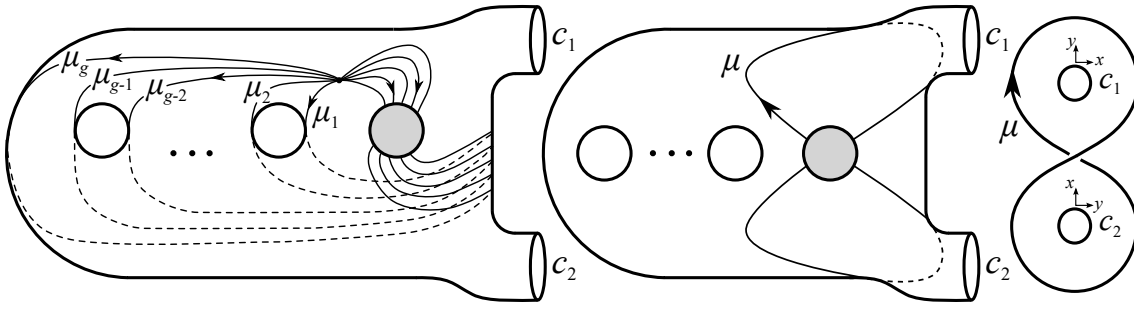
Wtedy po abelianizacji, na poziomie $H_1(N_{g,2})$, 1-cykl $2\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + 2\mu_g$ może być reprezentowany przez dwustronnym okrąg. Oznaczmy go przez μ . Okrąg μ rozdziela powierzchnię $N_{g,2}$ na dysk z dwoma dziurami, czyli powierzchnię $S_{0,3}$, oraz powierzchnię $N_{g,1}$ (przykładowy wybór $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g$ dla dwóch różnych modeli $N_{g,2}$ na Rysunkach 2.15 i 2.16).



Rysunek 2.15: Przykładowy wybór $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g$ na powierzchni $N_{g,2}$ przedstawionej jako pierścień z wklejonymi g wstęgami Möbiusa. Obok orientacje w otoczeniach okręgów c_1, c_2 wyznaczone przez orientację na $S_{0,3}$.

Ponieważ $S_{0,3}$ jest orientowalna i jej brzeg składa się z okręgów μ, c_1, c_2 , ma sens porównanie orientacji w otoczeniach regularnych okręgów c_1 i c_2 .

Będziemy przyjmować, że dla ustalonej orientacji w otoczeniu regularnym okręgu c_1 orientacja w otoczeniu regularnym okręgu c_2 jest wybrana w taki sposób, aby na orientowalnej podpowierzchni $S_{0,3}$ wyznaczonej przez μ orientacje te były zgodne.



Rysunek 2.16: Przykładowy wybór $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g$ na powierzchni $N_{g,2}$ przedstawionej jako suma spójna $S_{\frac{g-1}{2}, 2}$ z płaszczyzną rzutową. Obok orientacje w otoczeniach okręgów c_1, c_2 wyznaczone przez orientację na $S_{0,3}$.

Dzięki przyjęciu takiej konwencji możliwe jest odróżnienie iloczynu skręceń $(t_{c_1} t_{c_2})^{\pm 1}$ od $(t_{c_1} t_{c_2}^{-1})^{\pm 1}$, co będzie miało duże znaczenie w Rozdziale 5.

2.5 Reprezentacje ortogonalne $\mathcal{M}(N_g)$

Elementy grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(X)$ działają na klasach izotopii okręgów na powierzchni X , a (zorientowane) okręgi reprezentują cykle 1-wymiarowe, elementy pierwszej grupy homologii $H_1(X; \mathbb{Z})$. Oznacza to, że elementy $\mathcal{M}(X)$ indukują automorfizmy $H_1(X; \mathbb{Z})$. Ponadto odwzorowania izotopijne z identycznością indukują trywialny automorfizm, $H_1(X; \mathbb{Z})$, więc istnieje kanoniczny homomorfizm

$$\mathcal{M}(X) \rightarrow \text{Aut}(H_1(X; \mathbb{Z})).$$

Rozpatrzmy najpierw przypadek orientowalny. Z Uwagi 1.3.11 wiemy, że na $H_1(S_g; \mathbb{Z})$ istnieje forma dwuliniowa J dana macierzą

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{bmatrix}.$$

Każda klasa izotopii $f \in \mathcal{M}(S_g)$ spełnia $J(f(a), f(b)) = J(a, b)$, gdzie a, b to klasy homologii okręgów na S_g (Uwaga 1.3.10), więc w obrazie homomorfizmu $\mathcal{M}(S_g) \rightarrow \text{Aut}(H_1(S_g; \mathbb{Z}))$ znajdują się wyłącznie macierze zachowujące J .

Lemat 2.5.1. *Macierz A zachowuje formę dwuliniową $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow K$ daną macierzą M wtedy i tylko wtedy, gdy $A^T M A = M$ (A^T oznacza transponowaną macierz A).*

Dowód.

$$\forall_{x, y \in X} \quad \langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle$$

$$\forall_{x, y \in X} \quad x^T M y = (Ax)^T M (Ay)$$

$$\forall_{x, y \in X} \quad x^T M y = x^T (A^T M A) y$$

$$M = A^T M A$$

□

Wniosek 2.5.2. *Obraz homomorfizmu $\mathcal{M}(S_g) \rightarrow \text{Aut}(H_1(S_g; \mathbb{Z}))$ zawiera się w grupie $\{A \in \text{M}(2g, \mathbb{Z}) \mid A^T J A = J\} = \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$.*

Prawdziwe jest nawet mocniejsze stwierdzenie [44, str. 178], że

$$\text{im } [\mathcal{M}(S_g) \rightarrow \text{Aut}(H_1(S_g; \mathbb{Z}))] = \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}).$$

Grupę $\text{Sp}(2g; \mathbb{Z})$ nazywamy *grupą symplektyczną* o współczynnikach w \mathbb{Z} , a homomorfizmy

$$\mathcal{M}(S_g) \rightarrow \text{Aut}(H_1(S_g; \mathbb{Z}))$$

nazywamy *reprezentacjami symplektycznymi* grup klas odwzorowań.

Monden wykorzystał Wniosek 2.5.2 do wykazania, że pierwiastek ze skręcenia Dehna względem okręgu nierozdzielającego w grupie klas odwzorowań powierzchni orientowalnej musi być nieparzystego stopnia [47, Sekcja 5]. Dokładniej, wykazał, że macierze symplektyczne indukowane przez skręcenia Dehna względem okręgów nierozdzielających nie mają pierwiastków stopnia 2 w $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. Podobny argument wykorzystamy w przypadku nieorientowalnym.

Przyjmijmy, zgodnie Przykładem 1.3.7, $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g)$ za bazę \mathbb{Z} -modułu $H_1(N_g; \mathbb{Z})$. Z bazą tą stowarzyszona jest forma dwuliniowa $\langle \cdot, \cdot \rangle : H_1(N_g; \mathbb{Z}_2) \times H_1(N_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ o macierzy danej przez I_g (Uwaga 1.3.11). Niech

$$\Psi : \mathcal{M}(N_g) \rightarrow \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}))$$

będzie homomorfizmem indukowanym przez działanie $\mathcal{M}(N_g)$ na 1-cyklach oraz

$$\Psi_2 : \mathcal{M}(N_g) \rightarrow \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)),$$

będzie złożeniem Ψ z naturalnym homomorfizmem $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z})) \rightarrow \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2))$, który macierzy $A \in \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}))$ przyporządkowuje macierz $A \pmod{2}$. Podobnie jak w przypadku orientowalnym, macierze będące w obrazie homomorfizmu Ψ_2 zachowują formę dwuliniową $\langle \cdot, \cdot \rangle$ [21, 59].

Wniosek 2.5.3. *Obrazem homomorfizmu $\Psi_2 : \mathcal{M}(N_g) \rightarrow \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2))$ jest podgrupa grupy macierzy ortogonalnych wymiaru g o współczynnikach z \mathbb{Z}_2*

$$\text{im } \Psi_2 \subseteq \{A \in \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)) \mid A^T A = I_g\} = O(g, \mathbb{Z}_2).$$

Definicja 2.5.4. Jeżeli c jest okręgiem takim, że $N_g \setminus c = N_{g-2,2}$, to mówimy, że skręcenie Dehna t_c jest *typu A*. Okrąg c jest wówczas topologicznie równoważny z okręgami a_i (notacja według Podrozdziału 2.4.1). Jeżeli c jest okręgiem takim, że $N_g \setminus c = S_{\frac{g-2}{2},2}$, to mówimy, że skręcenie Dehna t_c jest *typu B*. Jest to możliwe wyłącznie, gdy g jest liczbą parzystą. Okrąg c jest wówczas topologicznie równoważny z dwustronnym okręgiem b reprezentującym *klasę charakterystyczną* $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_g$ w $H_1(N_g, \mathbb{Z}_2)$.

Sprawdzając działanie elementów u_i, y_i, t_{a_i}, t_b (notacja: Definicja 2.5.4 i Podrozdział 2.4.1) łatwo pokazać, że w bazie $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g)$ indukowane przez nie elementy $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}))$ mają następującą postać [65, str. 507]:

$$\begin{aligned}\Psi(u_i) &= I_{i-1} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus I_{g-i-1} \\ \Psi(y_i) &= I_{i-1} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \oplus I_{g-i-1} \\ \Psi(t_{a_i}) &= I_{i-1} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \oplus I_{g-i-1} \\ \Psi(t_b) &= I_g + \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & -1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_g\end{aligned}$$

gdzie I_n oznacza macierz identycznościową rzędu n . W pracy [56] korzystaliśmy z następujących dwóch obserwacji:

Uwaga 2.5.5. Automorfizmy $H_1(N_g; \mathbb{R})$ indukowane przez transpozycję wstęg Möbiusa oraz ślizg wstęgi Möbiusa mają wyznacznik równy -1 . Stąd, jeżeli pierwiastek z transpozycji/ślizgu istnieje, musi on być nieparzystego stopnia.

Uwaga 2.5.6. Automorfizm $H_1(N_g; \mathbb{R})$ indukowany przez skręcenie Dehna ma wyznacznik równy 1 . W szczególności, ponieważ ewentualny pierwiastek z transpozycji/ślizgu musi być nieparzystego stopnia (Uwaga 2.5.5), nie może być on elementem sprzężonym z iloczynem skręceń Dehna.

2.5.1 Nieparzystość pierwiastka ze skręcenia Dehna względem okręgu nierozdzielającego

Badanie istnienia pierwiastków ze skręceń Dehna względem okręgów nierozdzielających w $\mathcal{M}(N_g)$ można ograniczyć do badania pierwiastków z t_{a_i} oraz t_b (Wniosek 2.3.8). Następujący fakt jest nieorientowaną wersją dowodu nieparzystości pierwiastka ze skręcenia Dehna przedstawionego w [47, Sekcja 5].

Fakt 2.5.7. Niech c będzie generycznym nierozdzielającym okręgiem dwustronnym na powierzchni nieorientowalnej N_g , $g \geq 3$, oraz niech $f \in \mathcal{M}(N_g)$ będzie elementem takim, że $f^n = t_c$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n . Wtedy n jest nieparzysta.

Dowód. Z Wniosku 2.5.3 dla każdego $f \in \mathcal{M}(N_g)$ zachodzi

$$\Psi_2(f)^T \Psi_2(f) = I_g.$$

Pokażemy, że nie istnieją pierwiastki stopnia 2 z t_{a_i} ($i = 1, \dots, g$) oraz t_b . Przypuśćmy, że istnieją $f, g \in \mathcal{M}(N_g)$ takie, że $f^2 = t_{a_i}$ oraz $g^2 = t_b$. Oznaczmy

$$\begin{aligned}\Psi_2(t_{a_i}) &= A = I_{i-1} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus I_{g-i-1}, \\ \Psi_2(f) &= P = (p_{i,j})_{i,j=1,\dots,g}, \\ \Psi_2(t_b) &= B = I_g + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}_g, \\ \Psi_2(g) &= R = (r_{i,j})_{i,j=1,\dots,g}.\end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{cases} P^2 = A \\ P^{-1} = P^T \end{cases} \implies AP^T = P \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} R^2 = B \\ R^{-1} = R^T \end{cases} \implies BR^T = R.$$

Zauważmy, że A jest macierzą permutacji, która zamienia miejscami wiersz i -ty z $(i+1)$ -wszym, więc równość $AP^T = P$ implikuje, że $p_{j,k} = p_{k,j}$ oraz $p_{i,k} = p_{k,i} = p_{i+1,k} = p_{k,i+1}$ dla $i, j, k = 1, \dots, g$. W szczególności P jest macierzą symetryczną, $P^T = P$. Ponieważ jednocześnie $P^T = P^{-1}$, więc $P^2 = I_g$, co jest sprzeczne z $P^2 = A$.

Równość $BR^T = R$ implikuje $r_{i,j} = \sum_{k \neq i} r_{j,k}$ dla $i, j, k = 1, 2, \dots, g$, a więc suma współczynników w każdej kolumnie jest równa sumie współczynników w każdym wierszu i wynosi 0, ponieważ (wszystkie równości są równościami modulo 2, g jest parzyste)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^g r_{i,j} &= (g-1) \cdot \sum_{i=1}^g r_{j,i} = \sum_{i=1}^g r_{j,i} \\ r_{j,j} + \sum_{i \neq j} r_{i,j} &= r_{j,j} + \sum_{i \neq j} r_{j,i} \\ \sum_{i \neq j} r_{i,j} &= \sum_{i \neq j} r_{j,i} \\ r_{j,j} + (g-2) \cdot \sum_{i=1}^g r_{j,i} &= \sum_{i \neq j} r_{j,i} \\ r_{j,j} &= \sum_{i \neq j} r_{j,i} \\ \sum_{i=1}^g r_{j,i} &= \sum_{i=1}^g r_{i,j} = 0.\end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^g r_{j,k} &= 0 \\ r_{j,i} + \sum_{k \neq i} r_{j,k} &= 0 \\ r_{j,i} + r_{i,j} &= 0 \\ r_{j,i} &= r_{i,j},\end{aligned}$$

czyli R jest macierzą symetryczną, stąd $R^2 = I_g$, więc otrzymujemy sprzeczność. \square

Rozdział 3

Orbifoldy dwuwymiarowe

Rozmaitości n -wymiarowe są przestrzeniami topologicznymi lokalnie homeomorficznymi z przestrzenią euklidesową \mathbb{R}^n , natomiast orbifoldy n -wymiarowe – z przestrzenią orbit \mathbb{R}^n/Γ , gdzie Γ jest pewną grupą skończoną działającą na \mathbb{R}^n . W tym sensie orbifoldy są naturalnym uogólnieniem pojęcia rozmaitości.

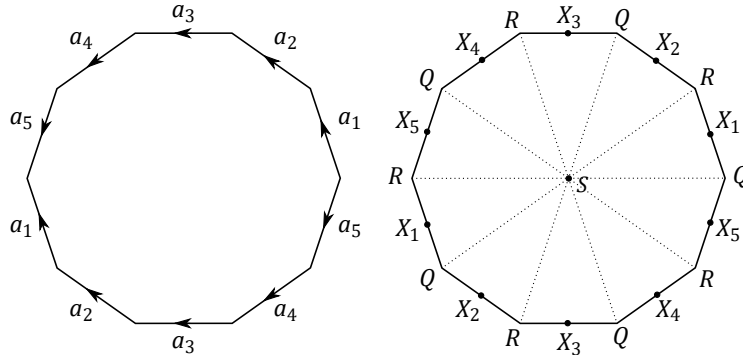
Jeśli f jest homeomorfizmem skończonego rzędu na powierzchni X , to f indukuje strukturę orbifoldu dwuwymiarowego na przestrzeni ilorazowej $X/\langle f \rangle$ (gdy dla każdego k homeomorfizm f^k nie ma punktów stałych na X , to otrzymujemy strukturę orbifoldu trywialnego). Badając orbifold $\mathcal{O} = X/\langle f \rangle$, można uzyskać wiele informacji o własnościach grupy $\langle f \rangle$. Będziemy korzystali z tej metody, przy ustalaniu istnienia pierwiastków ze skręceń Dehna w grupie klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej. Związek między tymi dwoma zagadnieniami opiera się na Twierdzeniu o Problemie Realizacji Nielsena (Twierdzenie 2.1.2), co zostanie z detalami wyjaśnione w dowodzie Twierdzenia 4.1.1.

3.1 Definicja i przykłady

Przykład 3.1.1. Na początku Rozdziału 1 pisaliśmy o możliwości reprezentowania powierzchni S_g za pomocą $4g$ -kąta foremnego o formule sklejenia brzegu $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Innym wielokątem, który można skleić do powierzchni S_g jest $(4g + 2)$ -kąć foremny P o formule sklejenia brzegu $a_1 a_2 \dots a_{2g+1} a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{2g+1}^{-1}$ (to znaczy, że aby otrzymać S_g , utożsamiamy ze sobą naprzeciwległe boki P , przykład dla $g = 2$ został przedstawiony na Rysunku 3.1). Zauważmy, że w tym przypadku obrazami wierzchołków wielokąta P są dwa różne punkty na S_g . Oznaczmy odwzorowanie ilorazowe przez $p : P \rightarrow S_g$.

Rozważmy obrót t wielokąta P o kąt $\frac{2\pi}{4g+2}$. Indukuje on homeomorfizm rzędu $4g + 2$ w $\text{Homeo}(S_g)$. Prawie wszystkie punkty S_g mają orbitę długości $4g + 2$ przy działaniu $G = \langle pt \rangle$. Wyjątkiem są

- obraz S środka wielokąta P : $G(S) = \{S\}$,



Rysunek 3.1: Dziesięciokąt foremny jako model powierzchni S_2 .

- obrazy Q, R wierzchołków wielokąta P : $G(Q) = G(R) = \{Q, R\}$,
- punkty $X_1, X_2, \dots, X_{2g+1}$ będące obrazami środków boków $a_1, a_2, \dots, a_{2g+1}$: $G(X_i) = \{X_1, X_2, \dots, X_{2g+1}\}$, $i = 1, 2, \dots, 2g + 1$.

Przestrzeń orbit działania G na S_g jest homeomorficzna ze sferą. Zauważmy jednak, że nie zachodzi równość z Twierdzenia 1.4.5

$$2 - 2g \neq (4g + 2) \cdot 2.$$

Oczywiście, powodem jest istnienie na S_g punktów o nietrywialnym stabilizatorze przy działaniu grupy G , to znaczy fakt, że odwzorowanie $\pi : S_g \rightarrow S_g/G$ nie jest prawdziwym nakryciem.

Rozważmy $y \in S_g/G$. Jeżeli $y \notin \{\pi(S), \pi(Q) = \pi(R), \pi(X_1) = \pi(X_2) = \dots = \pi(X_{2g+1})\}$, to y ma $4g + 2$ podniesienia na S_g oraz istnieje jego otwarte otoczenie U_y takie, że $p^{-1}(U_y)$ jest rozłączną sumą $4g + 2$ zbiorów otwartych, z których każdy jest homeomorficzny z U_y . Jeżeli jednak na przykład $y = \pi(S)$, to y ma tylko jedno podniesienie i dla jego dowolnie małego otoczenia U_y przeciwobraz $p^{-1}(U_y)$ nie składa się z $4g + 2$ rozłącznych zbiorów – wszystkie zbiory z $p^{-1}(U_y)$ zawierają bowiem punkt S . Możemy zauważyć, że struktura otoczenia U_y przypomina przestrzeń ilorazową \mathbb{D}/C_{4g+2} , gdzie $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, a C_{4g+2} jest generowana przez obrót \mathbb{D} o kąt $\frac{2\pi}{4g+2}$. Podobnie otoczenie punktu $\pi(Q) = \pi(R)$ przypomina \mathbb{D}/C_{2g+1} , a punktu $\pi(X_1) = \pi(X_2) = \dots = \pi(X_{2g+1})$ przestrzeń \mathbb{D}/C_2 .

Definicja 3.1.2. Orbifoldem \mathcal{O} nazywamy parę $(X_{\mathcal{O}}, \mathcal{U} = \{U_i\})$, gdzie $X_{\mathcal{O}}$ jest przestrzenią topologiczną Hausdorffa, a \mathcal{U} jej otwartym pokryciem takim, że

- jeśli $U_1, U_2, \dots, U_k \in \mathcal{U}$, to $\bigcap_{i=1}^k U_i \in \mathcal{U}$,
- dla każdego zbioru $U_i \in \mathcal{U}$ istnieje zbiór otwarty $V_i \subset \mathbb{R}^n$, skończona grupa Γ_i działająca na V_i oraz homeomorfizm $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i/\Gamma_i$,
- jeżeli $U_i \subset U_j$, to istnieje monomorfizm $f_{ij} : \Gamma_i \hookrightarrow \Gamma_j$ i zanurzenie $\varphi_{ij} : V_i \hookrightarrow V_j$ takie, że dla każdego $g \in \Gamma_i$ zachodzi $\varphi_{ij}(gx) = f_{ij}(g)\varphi_{ij}(x)$ oraz poniższy diagram jest komutujący.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^n \supset V_i & \xleftarrow{\varphi_{ij}} & V_j \subset \mathbb{R}^n \\
\downarrow & & \downarrow \\
V_i / \Gamma_i & \xrightarrow{\quad} & V_j / f_{ij} \Gamma_i \\
\uparrow \varphi_i & & \downarrow \\
X_{\mathcal{O}} \supset U_i & \xrightarrow{\subset} & U_j \subset X_{\mathcal{O}} \\
& & \uparrow \varphi_j \\
& & V_j / \Gamma_j
\end{array}$$

Uwaga 3.1.3. [66, str. 301] Zanurzenie $\varphi_{ij} : V_i \hookrightarrow V_j$ z Definicji 3.1.2 jest zdefiniowane tylko z dokładnością do złożenia z elementami z Γ_j , a monomorfizm f_{ij} z dokładnością do sprzężenia przez elementy z Γ_j . W ogólności nie jest prawdą, że $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \varphi_{ij}$, gdy $U_i \subset U_j \subset U_k$, jednak istnieje element $g_k \in \Gamma_k$ taki, że $g_k \varphi_{ik} = \varphi_{jk}$ oraz dla każdego $g_i \in \Gamma_i$ zachodzi $g_k f_{ik}(g_i) g_k^{-1} = f_{jk} f_{ij}(g_i)$.

Uwaga 3.1.4. Odwzorowania $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i / \Gamma_i$ pełnią funkcję *map orbifoldowych*. Rodzinę $\{(\varphi_i, U_i, V_i, \Gamma_i), (f_{ij}, \varphi_{ij})\}$ możemy nazywać *atlasem orbifoldowym* na $X_{\mathcal{O}}$, a maksymalny atlas orbifoldowy na $X_{\mathcal{O}}$ *strukturą orbifoldową* na $X_{\mathcal{O}}$.

Przykład 3.1.5. Każda zamknięta rozmaitość jest *trywialnym orbifoldem*, to znaczy takim, że każda grupa Γ_i jest trywialna.

Fakt 3.1.6. [66, Stwierdzenie 13.2.1] *Niech X będzie rozmaitością n -wymiarową, a G grupą działającą na X w sposób właściwie dyskretny. Wtedy przestrzeń orbit X/G ma strukturę orbifoldu.*

Dowód. Niech $p : X \rightarrow X/G$ będzie kanonicznym rzutowaniem na przestrzeń orbit. Ustalmy punkt $x \in X/G$ i $\tilde{x} \in X$ taki, że $p(\tilde{x}) = x$. Oznaczmy przez S_x stabilizator punktu \tilde{x} względem działania grupy G (zależy on, oczywiście, od wyboru podniesienia \tilde{x} punktu x oraz $|S_x| < \infty$), to znaczy podgrupę $Stab_G(\tilde{x}) \leq G$. Punkt \tilde{x} posiada otwarte otoczenie V_x (homeomorficzne z otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n) niezmiennicze przy działaniu S_x oraz takie, że dla każdego $g \in G \setminus S_x$ zachodzi $V_x \cap g(V_x) = \emptyset$. Oznacza to, że rzutowanie $V_x \rightarrow U_x = V_x / S_x$ jest homeomorfizmem. Otrzymujemy w ten sposób pokrycie $\{U_x\}_{x \in X/G}$ przestrzeni X/G , które w oczywisty sposób spełnia dwa ostatnie warunki Definicji 3.1.2.

Aby otrzymać pokrycie, które jest także zamknięte względem skończonych przekrojów, to znaczy spełnia pierwszy warunek Definicji 3.1.2, dodajemy do $\{U_x\}_x$ wszystkie skończone przekroje zbiorów z $\{U_x\}_x$. Musimy jednak zapewnić, że dla każdego takiego niepustego przekroju $U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \dots \cap U_{x_k}$ istnieją zbiór otwarty $V_{(x_1, x_2, \dots, x_k)} \subset X$ oraz grupa $G_{(x_1, x_2, \dots, x_k)}$ działająca na $V_{(x_1, x_2, \dots, x_k)}$ takie, że zbiór $U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \dots \cap U_{x_k}$ jest homeomorficzny z $V_{(x_1, x_2, \dots, x_k)} / G_{(x_1, x_2, \dots, x_k)}$.

Jeżeli dla pewnych $x_1, x_2, \dots, x_k \in X/G$ zachodzi $U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \dots \cap U_{x_k} \neq \emptyset$, to również

$V_{x_1}/G \cap V_{x_2}/G \cap \dots \cap V_{x_k}/G \neq \emptyset$. Nie oznacza to jednak, że $V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \dots \cap V_{x_k} \neq \emptyset$, tylko że istnieją elementy $g_1, g_2, \dots, g_k \in G$, dla których $g_1 V_{x_1} \cap g_2 V_{x_2} \cap \dots \cap g_k V_{x_k} \neq \emptyset$. Zbiór ten można przyjąć za szukane „podniesienie” $V_{(x_1, x_2, \dots, x_k)}$ zbioru $U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \dots \cap U_{x_k}$. Wówczas szukaną grupą $G_{(x_1, x_2, \dots, x_k)}$ działającą na $V_{(x_1, x_2, \dots, x_k)}$ jest $g_1(S_{x_1})g_1^{-1} \cap g_2(S_{x_2})g_2^{-1} \cap \dots \cap g_k(S_{x_k})g_k^{-1}$, to znaczy

$$U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \dots \cap U_{x_k} \approx (g_1 V_{x_1} \cap g_2 V_{x_2} \cap \dots \cap g_k V_{x_k}) / (g_1(S_{x_1})g_1^{-1} \cap g_2(S_{x_2})g_2^{-1} \cap \dots \cap g_k(S_{x_k})g_k^{-1}).$$

□

Wniosek 3.1.7. *Przestrzeń S_g/G z Przykładu 3.1.1 jest orbifoldem.*

Z każdym punktem x orbifoldu \mathcal{O} można powiązać grupę Γ_x , która jest dobrze zdefiniowana z dokładnością do izomorfizmu: w otoczeniu $U_x \approx V_x/\Gamma$, $V_x \subset \mathbb{R}^n$, punktu x grupa $\Gamma_x \leq \Gamma$ jest stabilizatorem tych punktów należących do V_x , które są przeciwobrazami punktu x przy odwzorowaniu $V_x \rightarrow V_x/\Gamma \rightarrow U_x$. Grupę Γ_x będziemy nazywać *grupą stowarzyszoną z punktem x* .

Definicja 3.1.8. *Zbiorem punktów osobliwych (ang. *singular locus*) orbifoldu \mathcal{O} nazywamy zbiór*

$$\Sigma_{\mathcal{O}} = \{x \in \mathcal{O} \mid \Gamma_x \neq \{1\}\}.$$

Zbiór $X_{\mathcal{O}} \setminus \Sigma_{\mathcal{O}}$ nazywamy *zbiorem punktów regularnych*.

Mówimy, że orbifold jest *rozmaitością* lub *trywialnym orbifoldem*, jeżeli $\Sigma_{\mathcal{O}} = \emptyset$.

Ponieważ nietrywialny homeomorfizm rozmaitości X , który jest stały na otwartym podzbiore $U \subset X$, nie może być skończonego rzędu [49], to zbiór punktów osobliwych $\Sigma_{\mathcal{O}}$ orbifoldu \mathcal{O} jest zbiorem domkniętym i nigdziegęstym [66, str. 303].

Definicja 3.1.9. *n -wymiarowym orbifoldem z brzegiem nazywamy przestrzeń, która jest lokalnie homeomorficzna z \mathbb{R}^n/Γ lub \mathbb{R}_+^n/Γ dla pewnej skończonej grupy Γ . Wnętrzem $\text{int } \mathcal{O}$ orbifoldu \mathcal{O} nazywamy zbiór tych punktów, których otoczenia są homeomorficzne z \mathbb{R}^n/Γ (nazywamy je *punktami wewnętrznymi* orbifoldu). Brzeg $\partial\mathcal{O}$ orbifoldu \mathcal{O} definiujemy jako dopełnienie zbioru $\text{int } \mathcal{O}$. Brzeg $\partial\mathcal{O}$ składa się z *punktów brzegowych*.*

Definicja 3.1.10. *Podorbifoldem \mathcal{O}' n -wymiarowego orbifoldu $\mathcal{O} = (X_{\mathcal{O}}, \mathcal{U})$ nazywamy taką strukturę orbifoldu na podprzestrzeni $X_{\mathcal{O}'} \subset X_{\mathcal{O}}$, że każdy punkt $x \in X_{\mathcal{O}'}$ ma otoczenie $U_x \subset X_{\mathcal{O}}$, dla którego istnieje otwarty podzbiór $V_x \subset \mathbb{R}^n$ i skończona grupa Γ działająca na \mathbb{R}^n zachowując $V_x \cap \mathbb{R}^d$, $d \leq n$, takie że U_x jest homeomorficzne z $(V_x \cap \mathbb{R}^d)/\Gamma'$ (Γ' oznacza obcięcie grupy Γ do $V_x \cap \mathbb{R}^d$).*

Brzeg n -wymiarowego orbifoldu z brzegiem jest $(n-1)$ -wymiarowym podorbifoldem bez brzegu. Zauważmy, że $\partial\mathcal{O} \subset \partial X_{\mathcal{O}}$, ale nie zawsze zachodzi równość — Uwaga 3.1.19.

Ponieważ naszym celem jest dowód twierdzenia dotyczącego grup klas odwzorowań powierzchni, wykorzystując teorię orbifoldów, będziemy szczególną uwagę poświęcać orbifoldom dwuwymiarowym. Zaczniemy jednak od klasyfikacji orbifoldów jednowymiarowych, ponieważ orbifoldy te mogą być brzegiem orbifoldów dwuwymiarowych.

Uwaga 3.1.11. Każda nietrywialna grupa skończona działająca na \mathbb{R} w sposób wierny jest grupą cykliczną rzędu 2, a jej nietrywialny element jest sprzężony z symetrią względem punktu [67, Twierdzenie 9.7]. Stąd punkt x należący do orbifoldu 1-wymiarowego jest osobliwy wtedy i tylko wtedy, gdy $\Gamma_x = C_2$. Punkt taki będziemy nazywać *punktem lustrzanym* (ang. *mirror point*).

Fakt 3.1.12. [11, str. 1026] *Zwarty, spójny orbifold 1-wymiarowy może być*

- *okręgiem,*
- *odcinkiem o dwóch końcach będących punktami lustrzanymi,*
- *odcinkiem, którego jeden koniec jest punktem lustrzanym, a drugi punktem regularnym,*
- *odcinkiem, którego oba końce są punktami regularnymi.*

Definicja 3.1.13. Orbifold 1-wymiarowy z dwoma punktami lustrzanymi nazywamy *pełnym 1-orbifoldem*, a z jednym punktem lustrzanym *pół-1-orbifoldem*.

Z dokładnością do sprzężenia możemy założyć, że skończona grupa Γ działająca na \mathbb{R}^2 jest skończoną grupą izometrii. Może więc być to

- C_2 – grupa cykliczna rzędu 2, generowana przez symetrię osiową

$$C_2 = \langle \sigma \mid \sigma^2 \rangle,$$

- C_n – grupa cykliczna rzędu $n \geq 1$, generowana przez obrót o kąt $\frac{2\pi}{n}$ względem wybranego środka obrotu

$$C_n = \langle t \mid t^n \rangle,$$

- D_n – grupa diedralna rzędu $2n$ generowana przez obrót o kąt $\frac{2\pi}{n}$ względem wybranego środka obrotu i symetrię osiową o osi przechodzącej przez środek obrotu lub, równoważnie, przez dwie symetrie osiowe takie, że kąt między ich osiami wynosi $\frac{\pi}{n}$

$$D_n = \langle r, s \mid r^n, s^2, (sr)^2 \rangle = \langle s_1, s_2 \mid (s_1 s_2)^n, s_1^2, s_2^2 \rangle.$$

Wniosek 3.1.14. [66, Stwierdzenie 13.3.1] *Niech x należy do zbioru punktów osobliwych $\Sigma_{\mathcal{O}}$ dwuwymiarowego orbifoldu \mathcal{O} i niech U będzie jego dostatecznie małym otwartym otoczeniem. Wówczas istnieją trzy możliwości:*

- (i) *otoczenie U jest homeomorficzne z \mathbb{R}^2 / C_2 ,*
- (ii) *otoczenie U jest homeomorficzne z \mathbb{R}^2 / C_n ,*
- (iii) *otoczenie U jest homeomorficzne z \mathbb{R}^2 / D_n .*

Zauważmy, że każdy ze zbiorów \mathbb{R}^2 / C_2 , \mathbb{R}^2 / C_n , \mathbb{R}^2 / D_n jest homeomorficzny z \mathbb{R}^2 .

Wniosek 3.1.15. *Jeżeli \mathcal{O} jest orbifoldem dwuwymiarowym, to przestrzeń $X_{\mathcal{O}}$ jest powierzchnią.*

Definicja 3.1.16. Jeżeli zachodzi przypadek (i) z Wniosku 3.1.14, mówimy, że x jest *punktem lustrzanym*. Jeżeli zachodzi przypadek (ii), to x nazywamy *punktem stożkowym stopnia n* (ang. *cone point of order n*), natomiast gdy ma miejsce przypadek (iii), to x nazywamy *punktem narożnym stopnia n* (ang. *corner point of order n*)³.

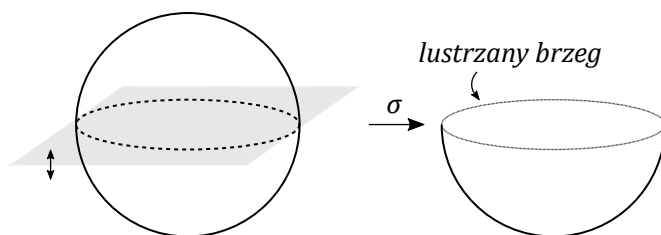
Wniosek 3.1.17. Jeżeli X jest powierzchnią, a $\langle t \mid t^n \rangle$ cykliczną podgrupą jej grupy homeomorfizmów oraz n jest nieparzyste, to jedyne punkty osobliwymi orbifoldu $C / \langle t \rangle$ są punkty stożkowe.

Przykład 3.1.18. Przestrzeń orbit S_g / G z Przykładu 3.1.1 jest sferą z trzema punktami stożkowymi: jednym stopnia $4g + 2$ (jest to punkt $\pi(S)$), jednym stopnia $2g + 1$ (jest to punkt $\pi(R) = \pi(Q)$) oraz jednym stopnia 2 (jest to punkt $\pi(X_1) = \pi(X_2) = \dots = \pi(X_{2g+1})$).

Uwaga 3.1.19. Rozmaitości z brzegiem możemy nadać strukturę orbifoldu, przyjmując, że każdy punkt brzegowy jest punktem lustrzanym. Taki brzeg nazywamy *lustrzanym brzegiem*. Orbifold z lustrzanym brzegiem pochodzi z konstrukcji opisanej w Falcie 3.1.6: jeżeli X jest rozmaitością z brzegiem, to oznaczmy przez dX rozmaitość będącą efektem sklejenia brzegami dwóch rozmaitości homeomorficznych z X . Niech σ będzie symetrią na dX , która zamienia dwie połówki miejscami. Wówczas $\langle \sigma \rangle = C_2$ oraz $mX = dX / \langle \sigma \rangle$ jest orbifoldem z lustrzanym brzegiem homeomorficznym z rozmaitością X [66, str. 302].

Zwróćmy uwagę na to, że choć zbiór punktów należących do lustrzanego brzegu orbifoldu mX jest brzegiem rozmaitości X , to lustrzany brzeg nie należy do brzegu orbifoldu mX . Jest tak, ponieważ każdy punkt lustrzanego brzegu ma otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^n / \langle s \rangle$, gdzie s jest symetrią względem hiperpłaszczyzny w \mathbb{R}^n , a n oznacza wymiar rozmaitości X , a więc spełnia definicję punktu wewnętrznego orbifoldu mX (Definicja 3.1.9).

Przykład 3.1.20. Niech σ będzie symetrią względem płaszczyzny na sferze S^2 . Przestrzenią orbit $S^2 / \langle \sigma \rangle$ jest dysk z lustrzanym brzegiem, który – zgodnie z Uwagą 3.1.19 – jest orbifoldem bez brzegu.

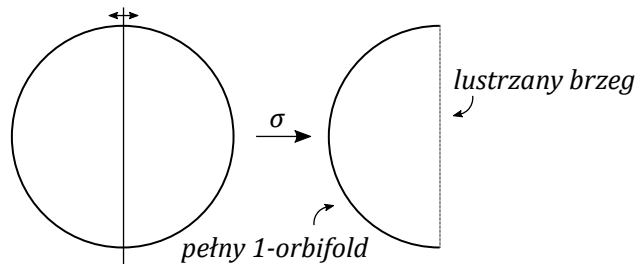


Rysunek 3.2: Dysk z lustrzanym brzegiem jako przestrzeń orbit działania symetrii na sferze. Strzałka z podpisem σ oznacza rzutowanie na przestrzeń orbit działania grupy $\langle \sigma \rangle$ na S^2 .

Przykład 3.1.21. Niech σ będzie symetrią osiową na dysku \mathbb{D} . Przestrzenią orbit $\mathbb{D} / \langle \sigma \rangle$ jest dysk z lustrzanym brzegiem i jedną składową „orbifoldowego” brzegu, która jest pełnym 1-orbifoldem

³W literaturze angielskiej mówi się o rzędzie punktu stożkowego czy narożnego, w tej pracy będziemy jednak konsekwentnie w tym kontekście używali nazwy „stopień”.

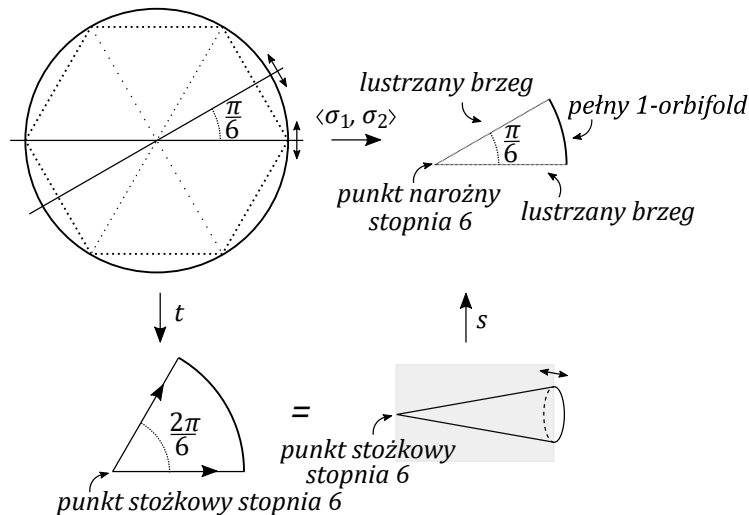
(zgodnie z Definicją 3.1.13). W szczególności otrzymany orbifold jest inny od orbifolderu otrzymanego w Przykładzie 3.1.20.



Rysunek 3.3: Dysk z lustrzanym brzegiem oraz pełnym 1-orbifoldem na brzegu jako przestrzeń orbit działania symetrii na dysku. Strzałka z podpisem σ oznacza rzutowanie na przestrzeń orbit działania grupy $\langle \sigma \rangle$ na \mathbb{D} .

Przykład 3.1.22. Niech σ_1, σ_2 będą dwiema symetrami osiowymi na dysku \mathbb{D} , takimi że ich osie przecinają się pod kątem $\frac{\pi}{n}$. Symetrie σ_1, σ_2 generują grupę diedralną D_n rzędu $2n$. Przestrzenią orbit $\mathbb{D} / \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ jest dysk z jednym punktem narożnym stopnia n , dwoma lustrzanymi brzegami oraz brzegiem orbifoldowym będącym pełnym 1-orbifoldem (zgodnie z Definicją 3.1.13).

Ten sam orbifold możemy otrzymać w dwóch krokach. Niech t będzie obrotem o kąt $\frac{2\pi}{n}$ na dysku. Przestrzeń orbit $\mathbb{D} / \langle t \rangle$ jest dyskiem z punktem stożkowym stopnia n , który posiada symetrię s i $(\mathbb{D} / \langle t \rangle) / \langle s \rangle = \mathbb{D} / \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$.

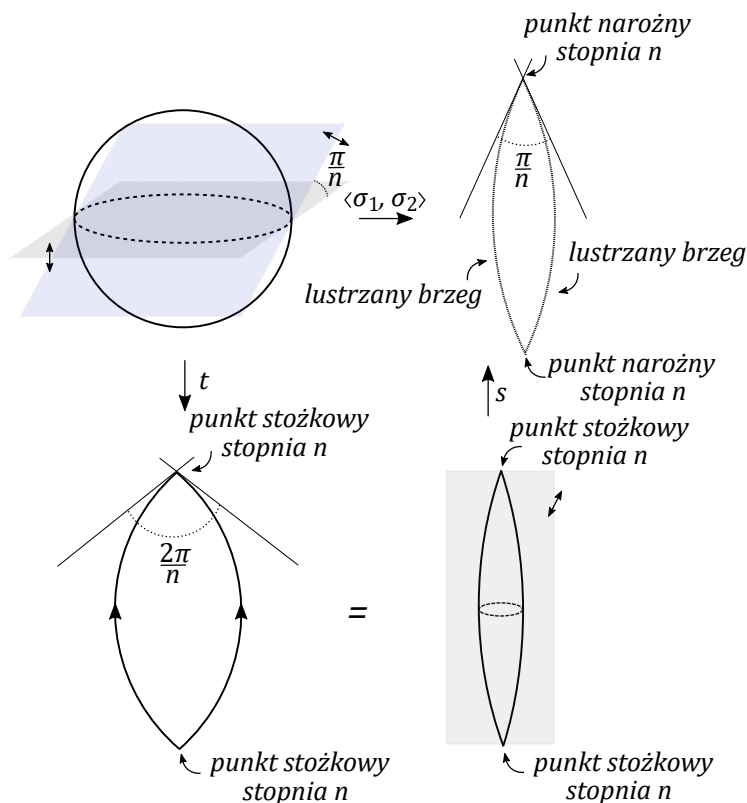


Rysunek 3.4: Dysk z dwoma lustrzanymi brzegami, punktem narożnym oraz pełnym 1-orbifoldem na brzegu jako przestrzeń orbit działania grupy diedralnej na dysku. Strzałki na ramionach wycinku koła w dolnym lewym rogu oznaczają, że utożsamiamy je ze sobą. Strzałki z podpisami oznaczają rzutowania na odpowiednie przestrzenie orbit.

Przykład 3.1.23. Niech σ_1, σ_2 będą dwiema symetrami na sferze S^2 względem płaszczyzn przecinających się pod kątem $\frac{\pi}{n}$. Symetrie σ_1, σ_2 generują grupę diedralną D_n rzędu $2n$.

Przestrzenią orbit $S^2 / \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ jest dysk z dwoma punktami narożnymi stopnia n i dwoma lustrzanymi brzegami.

Ten sam orbifold możemy otrzymać w dwóch krokach. Niech t będzie obrotem o kąt $\frac{2\pi}{n}$ na sferze. Przestrzeń orbit $S^2 / \langle t \rangle$ jest sferą z dwoma punktami stożkowymi stopnia n , która posiada symetrię s i $(S^2 / \langle t \rangle) / \langle s \rangle = S^2 / \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$.



Rysunek 3.5: Dysk z dwoma lustrzanymi brzegami i dwoma punktami narożnymi jako przestrzeń orbit działania grupy diedralnej na sferze. Strzałki na krawędziach dwukąta w dolnym lewym rogu oznaczają, że utożsamiamy je ze sobą. Strzałki z podpisami oznaczają rzutowania na odpowiednie przestrzenie orbit.

3.2 Grupa podstawowa orbifoldu

Definicja 3.2.1. *Nakryciem orbifoldowym* orbifoldu $\mathcal{O} = (X_{\mathcal{O}}, \mathcal{U})$ nazywamy parę $(\tilde{\mathcal{O}}, p)$, gdzie $\tilde{\mathcal{O}} = (X_{\tilde{\mathcal{O}}}, \tilde{\mathcal{U}})$ jest orbifoldem, natomiast $p : X_{\tilde{\mathcal{O}}} \rightarrow X_{\mathcal{O}}$ jest takie, że

- każdy punkt $x \in X_{\mathcal{O}}$ posiada otoczenie $U \approx V / \Gamma$ ($V \subset \mathbb{R}^n$), dla którego każda składowa spójności W_i zbioru $p^{-1}(U)$ jest homeomorficzna z V / Γ_i dla pewnej podgrupy $\Gamma_i \leq \Gamma$,
- homeomorfizm między V / Γ_i a W_i zachowuje włókna: to znaczy, jeżeli oznaczymy przez $q : V \rightarrow V / \Gamma$, $q_i : V \rightarrow V / \Gamma_i$ kanoniczne odwzorowania ilorazowe, a przez $\varphi : V / \Gamma \rightarrow U$, $\varphi_i : V / \Gamma_i \rightarrow W_i$ homeomorfizmy między przestrzeniami ilorazowymi przestrzeni

euklidesowej a podzbiórami U , W_i orbifoldów \mathcal{O} i $\tilde{\mathcal{O}}$ odpowiednio, to zachodzi $p\varphi_i q_i = \varphi q$, czyli poniższy diagram komutuje

$$\begin{array}{ccccc}
 & & V/\Gamma_i & \xrightarrow{\varphi_i} & W_i \\
 & \nearrow q_i & & & \downarrow p|_{W_i} \\
 \mathbb{R}^n \supset V & & & & \\
 & \searrow q & & & \\
 & & V/\Gamma & \xrightarrow{\varphi} & U
 \end{array}$$

Orbifold $\tilde{\mathcal{O}}$ nazywamy *orbifoldem nakrywającym*.

Wniosek 3.2.2. *Odwzorowanie $\pi : S_g \rightarrow S_g/G$ z Przykładu 3.1.1 jest nakryciem orbifoldowym.*

Przykład 3.2.3. Niech G będzie grupą działającą w sposób właściwie dyskretny na powierzchni X . Wówczas dla każdej podgrupy $G' \leq G$ przestrzeń X/G' jest przestrzenią nakrywającą orbifoldu X/G . W szczególności X nakrywa X/G .

Fakt 3.2.4. *Niech t będzie homeomorfizmem nieparzystego rzędu $n = 2k + 1 < \infty$ na spójnej powierzchni zamkniętej X . Oznaczmy $\mathcal{O} = X/\langle t \rangle$. Wtedy X jest powierzchnią nieorientowalną wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{O} jest homeomorficzny z powierzchnią nieorientowalną.*

Dowód. Zbiór $\Sigma_{\mathcal{O}}$ punktów osobliwych orbifoldu \mathcal{O} jest zbiorem dyskretnym (Wniosek 3.1.17), więc $X_{\mathcal{O}} \setminus \Sigma_{\mathcal{O}}$ jest spójną powierzchnią z nakłuciami. Oznaczmy

$$\text{Fix}(\bar{t}) = \{x \in X \mid \exists_{1 \leq s < n} t^s(x) = x\}.$$

Wówczas $X \setminus \text{Fix}(\bar{t}) \rightarrow X_{\mathcal{O}} \setminus \Sigma_{\mathcal{O}}$ jest nakryciem nieparzystego stopnia n , możemy więc skorzystać z Faktu 1.4.32, to znaczy $X \setminus \text{Fix}(\bar{t})$ jest nieorientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $X_{\mathcal{O}} \setminus \Sigma_{\mathcal{O}}$ jest nieorientowalna, a dodanie dyskretnego zbioru punktów do X oraz $X_{\mathcal{O}}$ nie wpływa na ich (nie)orientowalność. \square

Orbifoldowi dwuwymiarowemu $\mathcal{O} = (X_{\mathcal{O}}, \mathcal{U})$ o m punktach stożkowych stopni $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m$ i l punktach narożnych stopni $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_l$ przyporządkowujemy krotkę

$$(X_{\mathcal{O}}; (n_1, n_2, \dots, n_m); (k_1, k_2, \dots, k_l)).$$

Definicja 3.2.5. Orbifold nazywamy *dobrym* lub *rozwijalnym* (ang. *developable*), jeżeli posiada orbifold nakrywający, który jest rozmaitością.

Uwaga 3.2.6. [66, Twierdzenie 13.3.6] Istnieją tylko cztery orbifoldy dwuwymiarowe, które nie są dobre, to znaczy nie można ich otrzymać jako przestrzeni orbit właściwie dyskretnego działania pewnej grupy G na powierzchni X . Są to

$$\text{sfera z jednym punktem stożkowym stopnia } n > 1: \quad (S^2; (n); ()),$$

sfera z dwoma punktami stożkowymi stopni $1 < n_1 < n_2$:	$(S^2; (n_1, n_2); ()),$
dysk z jednym punktem narożnym stopnia $n > 1$:	$(\mathbb{D}; (); (n)),$
dysk z dwoma punktami narożnymi stopni $1 < n_1 < n_2$:	$(\mathbb{D}; (); (n_1, n_2)).$

W szczególności każdy orbifold dwuwymiarowy z co najmniej dwoma punktami stożkowymi tego samego stopnia posiada przestrzeń nakrywającą będącą powierzchnią.

Fakt 3.2.7. [66, Stwierdzenie 13.2.4] *Orbifold \mathcal{O} posiada nakrycie uniwersalne.*

Uwaga 3.2.8. W przypadku gdy kowymiar $\Sigma_{\mathcal{O}}$ w \mathcal{O} jest nie mniejszy od 2, Fakt 3.2.7 można łatwo udowodnić, korzystając z obserwacji, że $X_{\mathcal{O}} \setminus \Sigma_{\mathcal{O}}$ – jako spójna rozmaitość – posiada nakrycie uniwersalne oraz każda przestrzeń nakrywająca orbifold \mathcal{O} jest wyznaczona przez przestrzeń nakrywającą rozmaitość $X_{\mathcal{O}} \setminus \Sigma_{\mathcal{O}}$.

Definicja 3.2.9. Niech $x_0 \in X_{\mathcal{O}} \setminus \Sigma_{\mathcal{O}}$. *Orbifoldową grupą podstawową $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}, x_0)$ orbifolderu \mathcal{O} nazywamy grupę $\text{Aut}(p_0)$ przekształceń nakrywających nakrycia uniwersalnego $p_0 : (\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\mathcal{O}, x_0)$, gdzie $p_0(\tilde{x}_0) = x_0$.*

Często $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \neq \pi_1(X_{\mathcal{O}})$, istnieje jednak naturalny epimorfizm $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \rightarrow \pi_1(X_{\mathcal{O}})$ dany przez „zapominanie” struktury orbifoldowej. Jest on izomorfizmem, gdy zbiór punktów osobliwych $\Sigma_{\mathcal{O}}$ orbifolderu \mathcal{O} jest zbiorem pustym [1].

Przykład 3.2.10. Rozważmy działanie grupy $C_n = \langle t \mid t^n = 1 \rangle$, $n > 1$ na dysku $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, gdzie t jest obrotem wokół punktu 0 o kąt $\frac{2\pi}{n}$. Przestrzeń orbit \mathbb{D}/C_n można utożsamiać z X/\sim , gdzie

$$X = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = |z|e^{i\theta}, |z| < 1, 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n} \right\},$$

oraz $|z| \sim |z|e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Przykład dla $n = 6$ został zilustrowany w lewej części Rysunku 3.4.

Ponieważ \mathbb{D} jest przestrzenią jednopójną oraz C_n działa na niej w sposób właściwie dyskretny, to \mathbb{D}/C_n ma strukturę orbifolderu oraz $\pi_1^{orb}(\mathbb{D}/C_n) = C_n$. W szczególności

$$\pi_1^{orb}(\mathbb{D}/C_n) \neq \pi_1(\mathbb{D}/C_n) = \{1\}$$

(ostatnia równość wynika z faktu, że orbifold \mathbb{D}/C_n jest homeomorficzny z dyskiem).

Przykład 3.2.11. Ponieważ sfera S^2 jest jednopójna, to grupa podstawowa przestrzeni $S^2/\langle \sigma \rangle$ z Przykładu 3.1.20 jest izomorficzna z $\langle \sigma \rangle \cong C_2$.

Przykład 3.2.12. Ponieważ dysk \mathbb{D} jest przestrzenią jednopójną, to grupa podstawowa orbifolderu $\mathbb{D}/\langle \sigma \rangle$ z Przykładu 3.1.21 jest izomorficzna z $\langle \sigma \rangle \cong C_2$. Jest więc też izomorficzna z grupą podstawową orbifolderu $S^2/\langle \sigma \rangle$ z Przykładu 3.1.20, mimo że orbifoldy te są różne.

Przykład 3.2.13. Ponieważ dysk \mathbb{D} jest przestrzenią jednopójną, to grupa podstawowa przestrzeni $\mathbb{D}/\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ z Przykładu 3.1.22 jest izomorficzna z $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \cong D_n$.

Przykład 3.2.14. Grupa podstawowa przestrzeni $S^2 / \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ z Przykładu 3.1.23 jest izomorficzna z $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \cong D_n$.

3.2.1 Grupa podstawowa orbifoldu jako grupa klas homotopii pętli

Chcielibyśmy znać interpretację orbifoldowej grupy podstawowej jako grupy klas homotopii pętli w \mathcal{O} . Nie możemy definiować ścieżek w \mathcal{O} po prostu jako odwzorowań ciągłych $\alpha : [0, 1] \rightarrow X_{\mathcal{O}}$, ponieważ przy takiej definicji ich podniesienia nie są jednoznacznie wyznaczone, gdy istnieje $t \in [0, 1]$ taki, że $\alpha(t) \in \Sigma_{\mathcal{O}}$. Ograniczając się do orbifoldów, których zbiór punktów osobliwych $\Sigma_{\mathcal{O}}$ jest kowymiaru co najmniej 2 w $X_{\mathcal{O}}$, możemy rozpatrywać tylko ścieżki w $X_{\mathcal{O}} \setminus \Sigma_{\mathcal{O}}$ (bo wtedy $X_{\mathcal{O}} \setminus \Sigma_{\mathcal{O}}$ jest przestrzenią spójną, gdy $X_{\mathcal{O}}$ jest spójna), nadal jednak występuje problem z tym, że homotopia między ścieżkami może przechodzić przez punkty osobliwe. Na przykład w Przykładzie 3.2.10 jasne jest, że generatorem grupy podstawowej \mathbb{D}/C_n powinna być pętla nawijająca się wokół punktu stożkowego, której n -krotne złożenie powinno być homotopijne z identycznością, jednak homotopia między nimi przechodzi przez punkt stożkowy. Poniższe definicje formułujemy w oparciu o [9, str. 35 - 36].

Definicja 3.2.15. Ścieżką na orbifoldzie $\mathcal{O} = (X_{\mathcal{O}}, \mathcal{U})$ nazywamy ciągle odwzorowanie $\alpha : [0, 1] \rightarrow X_{\mathcal{O}}$, takie że

- istnieje skończenie wiele $t \in [0, 1]$ dla których $\alpha(t)$ należy do zbioru $\Sigma_{\mathcal{O}}$ punktów osobliwych orbifoldu \mathcal{O} ,
- dla każdego t takiego, że $\alpha(t) \in \Sigma_{\mathcal{O}}$ istnieje otoczenie U punktu $\alpha(t)$ homeomorficzne z V/Γ , gdzie $V \subset \mathbb{R}^n$, a Γ jest skończoną grupą homeomorfizmów V , otoczenie W punktu t , takie że dla każdego $s \in W \setminus \{t\}$ punkt $\alpha(s)$ jest regularny i należy do U oraz ścieżka $\tilde{\alpha} \subset V$ będąca podniesieniem $\alpha|_W$, którą nazywamy *lokalnym podniesieniem α wokół punktu t* .

$$\begin{array}{ccc}
 & & V \subset \mathbb{R}^n \\
 & \nearrow \tilde{\alpha}|_W & \downarrow \pi \\
 & & V/\Gamma \\
 & \searrow \alpha|_W & \downarrow \varphi \\
 W & \xrightarrow{\alpha|_W} & U \subset X_{\mathcal{O}}
 \end{array}$$

Nie będziemy odróżniać α jako odwzorowania ciągłego od obrazu $\alpha([0, 1]) \subset X_{\mathcal{O}}$, przyjmując taką interpretację, jaka w danym momencie jest wygodna.

Uwaga 3.2.16. [9, str. 35] Jeżeli $p : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}$ jest nakryciem orbifoldowym, a α ścieżką w $\tilde{\mathcal{O}}$, to $p\alpha$ jest ścieżką w \mathcal{O} (spełnia Definicję 3.2.15).

Wniosek 3.2.17. [9, str. 35] Jeżeli $p : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}$ jest nakryciem orbifoldowym, \tilde{x}_0 punktem regularnym orbifoldu $\tilde{\mathcal{O}}$, a $p(\tilde{x}_0)$ punktem regularnym orbifoldu \mathcal{O} , to każda ścieżka α na \mathcal{O} o początku w $p(\tilde{x}_0)$ ma dokładnie jedno podniesienie $\tilde{\alpha}$ na $\tilde{\mathcal{O}}$ o początku w \tilde{x}_0 .

Definicja 3.2.18. Niech α będzie ścieżką na orbifoldzie \mathcal{O} . Wybierzmy otwarty podzbiór $U \subset \mathcal{O}$, dla którego istnieje homeomorfizm $\varphi : V/\Gamma \rightarrow U$, gdzie $V \subset \mathbb{R}^n$, a Γ jest skończoną grupą homeomorfizmów V . Niech π będzie kanonicznym rzutowaniem na przestrzeń orbit $V \rightarrow V/\Gamma$.

$$V \xrightarrow{\pi} V/\Gamma \xrightarrow{\varphi} U.$$

Odwzorowanie $\phi = \varphi\pi$ jest nakryciem orbifoldowym.

Niech $[a, b] \subset [0, 1]$ będzie takim podprzedziałem, że $\alpha([a, b]) \subset U$ i oznaczymy przez $\tilde{\alpha}$ podniesienie $\alpha|_{[a, b]}$ na V . Niech β będzie dowolną ścieżką na V homotopijną z $\tilde{\alpha}$ (relatywnie względem końców). Ścieżkę $\phi(\beta)$ nazywamy *ścieżką otrzymaną ze ścieżki α przez elementarną homotopię*. Homotopię ścieżek na orbifoldzie \mathcal{O} definiujemy jako relację równoważności generowaną przez elementarne homotopie. Innymi słowy, ścieżki na orbifoldzie są homotopijne, jeśli ich podniesienia do podzbioru \mathbb{R}^n są homotopijne (relatywnie względem końców).

Definicja 3.2.19. Niech $x_0 \in X_{\mathcal{O}} \setminus \Sigma_{\mathcal{O}}$. Pętlą zaczepioną w x_0 nazywamy ścieżkę $\alpha : [0, 1] \rightarrow X_{\mathcal{O}}$, taką że $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Grupę podstawową $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}, x_0)$ definiujemy jako zbiór klas homotopii ścieżek (zgodnie z Definicją 3.2.18) zaczepionych w x_0 z działaniem $[\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta]$.

Niech $\mathcal{O} = (X_{\mathcal{O}}, \mathcal{U})$ będzie orbifoldem dwuwymiarowym, $\Sigma_{\mathcal{O}}$ jego zbiorem punktów osobliwych. Oznaczmy przez $\Sigma_{\mathcal{O}}^2$ podzbiór $\Sigma_{\mathcal{O}}$ kowymiaru ≥ 2 (ponieważ $\dim \mathcal{O} = 2$, w $\Sigma_{\mathcal{O}}^2$ są wyłącznie punkty stożkowe). Wybierzmy punkt bazowy $x_0 \in \text{int } X_{\mathcal{O}} \setminus \Sigma_{\mathcal{O}}^2$. W oparciu o [12, str. 10] skonstruujemy $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}, x_0)$ przez dodanie generatorów i relacji do $\pi_1(X_{\mathcal{O}} \setminus \Sigma_{\mathcal{O}}^2, x_0)$.

Dodatkowe generatory:

- Dla każdego $x \in \Sigma_{\mathcal{O}}^2$ wybieramy pętlę α_x w $X_{\mathcal{O}}$ zaczepioną w x_0 , która jednokrotnie nawija się wokół punktu x . Przez n oznaczamy rząd grupy Γ_x stowarzyszonej z x .
- Dla każdego lustrzanego brzegu M i każdej klasy homotopii ścieżek γ_M o początku w x_0 i końcu w punkcie należącym do M wprowadzamy nowy generator $\beta_{(M, \gamma_M)}$ zdefiniowany jako

$$\beta_{(M, \gamma_M)}(t) = \begin{cases} \gamma_M(2t) & \text{dla } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_M^{-1}(2t - 1) & \text{dla } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

To znaczy $\beta_{(M, \gamma_M)}$ jest pętlą o początku w x_0 , która po dojściu do M łukiem γ_M „odbija się” od lustrzanego brzegu M i wraca do punktu bazowego x_0 łukiem γ_M^{-1} .

Jeżeli \mathcal{O} posiada dwa różne lustrzane brzegi M, N , których domknięcia mają niepusty przekrój, $\overline{M} \cap \overline{N} \supset \{y\}$ (może się zdarzyć, że przekrój dwóch lustrzanych brzegów składa się z dwóch punktów, co ma miejsce w Przykładzie 3.1.23), to y jest punktem narożnym. Niech grupą z nim stowarzyszoną będzie grupa diedralna D_k rzędu $2k$.

Dodatkowe relacje:

- $\alpha_x^n = 1$,
- $\beta_{(M, \gamma_M)}^2 = 1$,

$$\bullet \delta_y^k = (\beta_{(M, \gamma_M)} \beta_{(N, \gamma_N)})^k = 1.$$

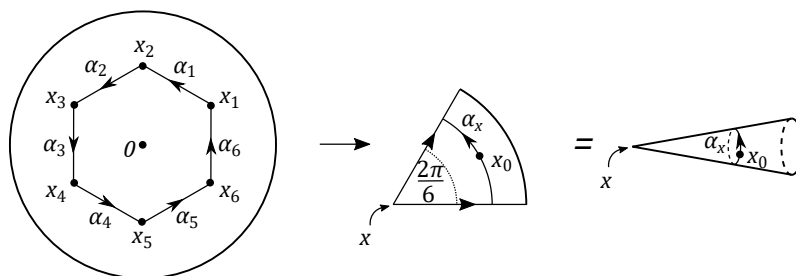
W ostatniej relacji wybieramy takie ścieżki γ_M, γ_N , które są homotopijne jako ścieżki o początku w x_0 i końcu w punkcie narożnym y . Ponadto dopuszczamy możliwość $M = N$ dla dwóch niehomotopijnych ścieżek od x_0 do M .

Interpretacja relacji:

- Jeżeli x jest punktem stożkowym ze stowarzyszoną grupą C_n , to posiada otoczenie U_x , w którym zawiera się pętla α_x , homeomorficzna z \mathbb{D}/C_n , gdzie C_n działa na dysku \mathbb{D} przez obroty. Mamy więc nakrycie $\varphi_x \pi_n$, gdzie π_n jest kanonicznym rzutowaniem na przestrzeń orbit, a φ_x homeomorfizmem

$$\mathbb{D} \xrightarrow{\pi_n} \mathbb{D}/C_n \xrightarrow{\varphi_x} U_x.$$

Przeciwbraz punktu x_0 względem $\varphi_x \pi_n$ składa się z n punktów $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{D}$. Przypuśćmy, że x_1 jest punktem bazowym \mathbb{D} . Pętla α_x ma n podniesień stanowiących $\frac{1}{n}$ -tą pętli wokół punktu 0 na dysku, oznaczmy je przez $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ i niech będą one takie, że dla $i = 1, 2, \dots, n-1$ $\alpha_i(1) = \alpha_{i+1}(0) = x_{i+1}$ oraz $\alpha_1(0) = \alpha_n(1) = x_1$. Wówczas $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ jest ściągającą pętlą na dysku będącą podniesieniem α_x^n (Rysunek 3.6).



Rysunek 3.6: Pętla α_x oraz podniesienie $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ pętli α_x^n .

- Niech $z \in M$ będzie punktem na lustrzanym brzegu M takim, że $\gamma_M(1) = z$. Istnieje otoczenie U_z punktu z zawierające łuk γ_M , które jest homeomorficzne z \mathbb{D}/C_2 , gdzie C_2 działa na dysku \mathbb{D} przez symetrię.

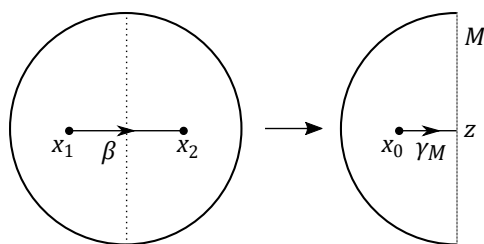
$$\mathbb{D} \xrightarrow{\pi_{sym}} \mathbb{D}/C_2 \xrightarrow{\varphi_z} U_z$$

jest nakryciem. Przeciwbraz $(\varphi_z \pi_{sym})^{-1}(x_0)$ składa się z dwóch punktów $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$. Przypuśćmy, że x_1 jest punktem bazowym \mathbb{D} .

Podniesieniem pętli $\beta_{(M, \gamma_M)}$ jest łuk β na dysku \mathbb{D} łączący punkty x_1 i x_2 , a podniesieniem pętli $\beta_{(M, \gamma_M)}^2$ jest ściągająca pętla o początku w x_1 , która po dojściu do x_2 łukiem β zawraca do x_1 łukiem β^{-1} (Rysunek 3.7).

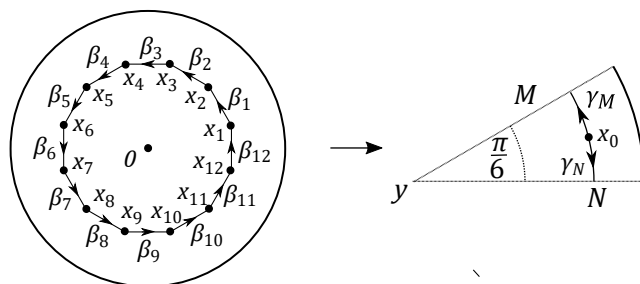
- Niech $y \in \overline{M} \cap \overline{N}$ będzie punktem narożnym, a U_y jego otoczeniem zawierającym łuki γ_M, γ_N homeomorficznym z \mathbb{D}/D_k .

$$\mathbb{D} \xrightarrow{\pi_{2k}} \mathbb{D}/D_k \xrightarrow{\varphi_y} U_y$$



Rysunek 3.7: Łuk γ_M oraz podniesienie β pętli $\beta_{(M,\gamma_M)}$.

jest nakryciem. Przeciwobraz $(\varphi_y \pi_{2k})^{-1}(x_0)$ składa się z $2k$ punktów x_1, x_2, \dots, x_{2k} . Pętla $\beta_{(M,\gamma_M)}$ ma $2k$ podniesień stanowiących $\frac{1}{2k}$ pętli wokół punktu 0 na dysku. Oznaczmy je przez $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2k}$ i niech będą one takie, że $\beta_i(1) = \beta_{i+1}(0) = x_{i+1}$ dla $i = 1, 2, \dots, 2k-1$ oraz $\beta_1(0) = \beta_{2k}(1) = x_1$. Wówczas łuki na dysku postaci $\beta_1\beta_2, \beta_3\beta_4, \dots, \beta_{2k-1}\beta_{2k}$ są k podniesieniami pętli $\beta_{(M,\gamma_M)}\beta_{(N,\gamma_N)}$ oraz $\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{2k}$ jest pętlą ściągającą na dysku będącą podniesieniem $(\beta_{(M,\gamma_M)}\beta_{(N,\gamma_N)})^k$ (Rysunek 3.8 ilustruje przypadek $k = 6$).



Rysunek 3.8: Łuki γ_M, γ_N oraz podniesienie $\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{2k}$ pętli $(\beta_{(M,\gamma_M)}\beta_{(N,\gamma_N)})^k$.

Twierdzenie 3.2.20. [12, str. 10] Niech \mathcal{O} będzie orbifoldem dwuwymiarowym z m punktami stożkowymi x_1, x_2, \dots, x_m stopni n_1, n_2, \dots, n_m , l punktami narożnymi y_1, y_2, \dots, y_l stopni k_1, k_2, \dots, k_l , s pełnymi 1-orbifoldami na brzegu $\partial\mathcal{O}$ i $q = l + s$ lustrzanymi brzegami M_1, M_2, \dots, M_q . Niech Y, R będą odpowiednio zbiorami generatorów i relacji otrzymanych za pomocą wyżej opisanej procedury, to znaczy

$$Y = \left\{ \alpha_{x_j} \right\}_{j=1}^m \cup \left\{ \beta_{(M_e, \gamma_e)} \right\}_{e=1}^q,$$

$$R = \left\{ \alpha_{x_j}^{n_j} \right\}_{j=1}^m \cup \left\{ \beta_{(M_e, \gamma_e)}^2 \right\}_{e=1}^q \cup \left\{ \delta_{y_i}^{k_i} \right\}_{i=1}^l.$$

Jeżeli grupa $\pi_1(X_{\mathcal{O}} \setminus \Sigma_{\mathcal{O}}^2, x_0)$ ma przedstawienie

$$\pi_1(X_{\mathcal{O}} \setminus \Sigma_{\mathcal{O}}^2, x_0) = \langle X \mid S \rangle,$$

gdzie X jest zbiorem generatorów, a S zbiorem relacji, to

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}, x_0) = \langle X, Y \mid S, R \rangle.$$

Uwaga 3.2.21. Generatory $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}, x_0)$ pochodzące od $\pi_1(X_{\mathcal{O}}, x_0)$ będziemy niekiedy nazywać *generatorami hiperbolicznymi*⁴.

Przykład 3.2.22. W Przykładzie 3.2.10 otrzymaliśmy $\pi_1^{orb}(\mathbb{D}/C_n) = C_n$. Na mocy Twierdzenia 3.2.20 jasne jest, że generatorem tej grupy jest pętla jednokrotnie nawijająca się wokół punktu stożkowego.

$$\pi_1^{orb}(\mathbb{D}/C_n) = \langle \alpha \mid \alpha^n \rangle.$$

Przedstawienie to otrzymaliśmy z przedstawienia grupy podstawowej dysku z nakłuciem

$$\pi_1(S_{0,1}^1) = \langle \alpha \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

przez dodatnie relacji $\alpha^n = 1$. Można o tym myśleć w ten sposób, że im wyższy jest stopień punktu stożkowego, tym bardziej „przypomina” on nakłucie.

Przykład 3.2.23. Przestrzeń z S_g/G z Przykładu 3.1.1 jest sferą z trzema punktami stożkowymi. Ponieważ

$$\pi_1(S_0^3) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \rangle,$$

więc orbifoldowa grupa podstawowa przestrzeni S_g/G z ma przedstawienie

$$\pi_1^{orb}(S_g/G) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \alpha_1^{4g+2}, \alpha_2^{2g+1}, \alpha_3^2, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \rangle.$$

Przykład 3.2.24. Przestrznią orbit $S^2/\langle\sigma\rangle$ z Przykładu 3.1.20 jest dysk z lustrzanym brzegiem, więc generatorem $\pi_1(S^2/\langle\sigma\rangle)$ jest pętla β o początku w punkcie bazowym x_0 , która po dojściu do lustrzanego brzegu „odbija się” i wraca do punktu bazowego.

$$\pi_1^{orb}(S^2/\sigma) = \langle \beta \mid \beta^2 \rangle \cong \langle \sigma \rangle \cong C_2.$$

Przykład 3.2.25. Przestrznią orbit $\mathbb{D}/\langle\sigma\rangle$ z Przykładu 3.1.21 jest dysk z lustrzanym brzegiem i jedną składową orbifoldowego brzegu, która jest pełnym 1-orbifoldem (zgodnie z Definicją 3.1.13). Generatorem $\pi_1^{orb}(\mathbb{D}/\sigma)$ jest pętla startująca w punkcie bazowym, która po dojściu do lustrzanego brzegu, odbija się od niego i wraca do punktu bazowego

$$\pi_1^{orb}(\mathbb{D}/\sigma) = \langle \beta \mid \beta^2 \rangle \cong \langle \sigma \rangle \cong C_2.$$

Przykład 3.2.26. Przestrznią orbit $\mathbb{D}/\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$ z Przykładu 3.1.22 jest dysk z jednym punktem narożnym stopnia n , który będziemy oznaczać przez y , dwoma lustrzanymi brzegami M, N oraz jednym orbifoldowym brzegiem będącym pełnym 1-orbifoldem. Oznaczmy przez γ_M, γ_N łuki o początku w punkcie bazowym x_0 i końcu w M lub N odpowiednio. Jeżeli przyjmiemy $\gamma_M(1) =$

⁴Terminologia ta wywodzi się z teorii grup Fuchsa.

$\gamma_N(1) = y \in \overline{M} \cap \overline{N}$, to ścieżki te są homotopijne. Niech β_M, β_N będą pętlami takimi, że

$$\beta_{(M, \gamma_M)}(t) = \begin{cases} \gamma_M(2t) & \text{dla } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_M^{-1}(2t-1) & \text{dla } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad \beta_{(N, \gamma_N)}(t) = \begin{cases} \gamma_N(2t) & \text{dla } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_N^{-1}(2t-1) & \text{dla } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Wówczas pętle β_M, β_N są generatorami $\pi_1^{orb}(\mathbb{D}/\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle)$ oraz $\beta_M^2 = \beta_N^2 = (\beta_M\beta_N)^n = 1$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\pi_1^{orb}(\mathbb{D}/\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle) = \langle\beta_M, \beta_N \mid \beta_M^2, \beta_N^2, (\beta_M\beta_N)^n\rangle \cong D_n.$$

Przykład 3.2.27. Przestrzenią orbit $S^2/\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$ z Przykładu 3.1.23 jest dysk z dwoma punktami narożnymi stopnia n , które będziemy oznaczać przez P, Q i dwoma lustrzanymi brzegami M, N .

Analogicznie jak w Przykładzie 3.2.26, uzyskujemy

$$\pi_1^{orb}(S^2/\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle) = \langle\beta_M, \beta_N \mid \beta_M^2, \beta_N^2, (\beta_M\beta_N)^n\rangle \cong D_n.$$

Uwaga 3.2.28. Niech G będzie grupą działającą w sposób właściwie dyskretny na rozmaitości X oraz niech $\mathcal{O} = X/G$. Podobnie jak w przypadku „zwykłych” nakryć (Fakt 1.4.7), nakrycie orbifoldowe $p : X \rightarrow X_{\mathcal{O}}$ indukuje monomorfizm $p_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1^{orb}(\mathcal{O})$, który pasuje do krótkiego ciągu dokładnego [9, Stwierdzenie 2.5]

$$1 \longrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{p_*} \pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow 1.$$

Na mocy Wniosku 3.2.17 reprezentację φ można skonstruować się w sposób analogiczny do tego opisanego w Faktie 1.4.23, mimo tego, że w jego dowodzie wykorzystuje się wolne działanie grupy na przestrzeni nakrywającej. Jest tak ponieważ w przypadku nakryć orbifoldowych mamy inną definicję ścieżek oraz homotopii ścieżek, a także zakładamy, że punkt bazowy orbifoldu nie jest punktem osobiwym.

Przykład 3.2.29. Zamurzymy torus S_1 w przestrzeni \mathbb{R}^3 w taki sposób, aby był niezmienniczy przy symetrii względem płaszczyzn xy, xz, yz . Niech ϱ będzie obrotem S_1 o kąt π wokół osi y . Przestrzenią orbit $S_1/\langle\varrho\rangle$ jest sfera z czterema punktami stożkowymi stopnia 2.

Przy wyborze generatorów takim jak na Rysunku 3.9, mamy następujące przedstawienia grup podstawowych:

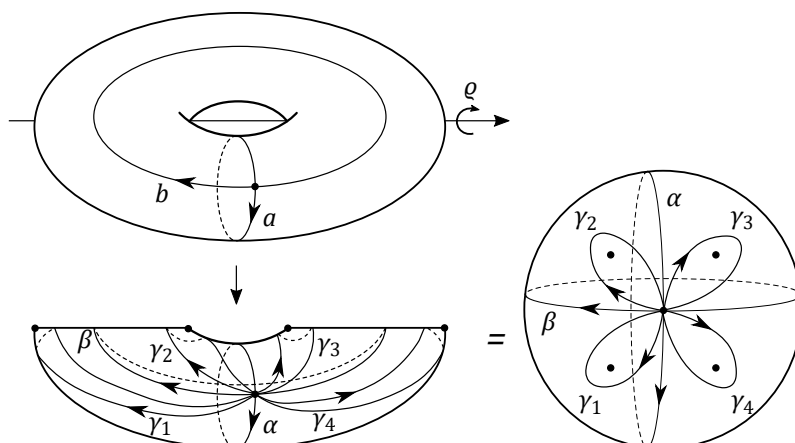
$$\pi_1(S_1) = \langle a, b \mid ab^{-1}a^{-1}b \rangle,$$

$$\pi_1^{orb}(S_1/\langle\varrho\rangle) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \mid \gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2, \gamma_4^2, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \rangle.$$

Oznaczmy przez p nakrycie orbifoldowe $p : S_1 \rightarrow S_1/\langle\varrho\rangle$. Wtedy

$$p_*(a) = \gamma_1\gamma_2, \quad p_*(b) = \gamma_2\gamma_3.$$

więc $\text{im } p_* = \langle \gamma_1\gamma_2, \gamma_2\gamma_3 \mid \gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2, \gamma_4^2, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \rangle$. W szczególności w obrazie nie ma pętli będących złożeniem nieparzystej liczby generatorów γ_i i γ_i^{-1} .



Rysunek 3.9: Nakrycie dysku z czterema punktami stożkowymi torusem.

Jasne jest, że reprezentacja φ z krótkiego ciągu dokładnego

$$1 \longrightarrow \pi_1(S_1) \xrightarrow{p_*} \pi_1^{orb}(S_1 / \langle \varrho \rangle) \xrightarrow{\varphi} C_2 \longrightarrow 1$$

jest zdefiniowana na generatorach jako $\varphi(\gamma_i) = \varrho$ dla każdego $i = 1, 2, 3, 4$, więc w jądrze $\ker \varphi$ znajdują się wszystkie pętle z $\pi_1^{orb}(S_1 / \langle \varrho \rangle)$, które przedstawione jako złożenie γ_i i γ_i^{-1} , $i = 1, 2, 3, 4$ mają parzystą liczbę czynników.

Oznaczmy $H = \pi_1^{orb}(S_1 / \langle \varrho \rangle)$. Epimorfizm $\varphi : H \rightarrow C_2$ istotnie indukuje izomorfizm $C_2 \cong H / \text{im } p_*$. Grupa ilorazowa $H / \text{im } p_*$ ma przedstawienie

$$H / \text{im } p_* = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \mid \gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2, \gamma_4^2, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \gamma_1\gamma_2, \gamma_2\gamma_3 \rangle.$$

Otrzymujemy

$$\begin{cases} \gamma_1^2 = \gamma_1\gamma_2 \\ \gamma_2^2 = \gamma_2\gamma_3 \\ \gamma_1^2 = \gamma_1\gamma_2\gamma_2\gamma_3 = \gamma_1\gamma_3 \end{cases} \implies \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3,$$

więc

$$H / \text{im } p_* = \langle \gamma_1, \gamma_4 \mid \gamma_1^2, \gamma_4^2, \gamma_1^3\gamma_4 \rangle = \langle \gamma_1, \gamma_4 \mid \gamma_1^2, \gamma_4^2, \gamma_1\gamma_4 \rangle = \langle \gamma_1 \mid \gamma_1^2 \rangle \cong \langle \varrho \rangle \cong C_2.$$

Lemat 3.2.30. [46, str. 403 - 404] Niech F będzie orientowalną powierzchnią zamkniętą, a $t : F \rightarrow F$ jej homeomorfizmem nieparzystego rzędu n , takim że przestrzeń orbit $\mathcal{O} = F / \langle t \rangle$ jest orbifoldem rodzaju g_0 z co najmniej jednym punktem stożkowym stopnia n oraz ewentualnie $m \geq 0$ innymi punktami stożkowymi stopni n_j , $j = 1, 2, \dots, m$, gdzie n_j jest dzielnikiem n . Niech dane

będzie przedstawienie jego orbifoldowej grupy podstawowej

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}) = \left\langle \alpha, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{g_0}, b_{g_0} \mid \alpha^n, \gamma_j^{n_j}, \alpha \left(\prod_{j=1}^m \gamma_j \right) \left(\prod_{i=1}^{g_0} [a_i, b_i] \right) \right\rangle.$$

Zbiór generujący $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ można homeomorficznie przekształcić w taki sposób, aby homomorfizm $\varphi : \pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \rightarrow C_n$ z krótkiego ciągu dokładnego indukowanego przez nakrycie $p : F \rightarrow \mathcal{O}$

$$1 \longrightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{p_*} \pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\varphi} C_n \longrightarrow 1,$$

przekształcał generatory hiperboliczne $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, g_0$ w 1.

Dowód. Homomorfizm φ definiujemy w sposób opisany w Fakcie 1.4.23. Wówczas jeżeli p jest punktem stożkowym stopnia n , wokół którego nawija się pętla α , to $\varphi(\alpha)$ jest elementem rzędu n w C_n , czyli generuje $\langle t \rangle = C_n$. Homomorfizm φ przekształca dany zbiór generatorów $(\alpha, \gamma_j, a_i, b_i), j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, g_0$, grupy $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ odpowiednio w

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\gamma_j), \varphi(a_i), \varphi(b_i)), \quad i = 1, 2, \dots, g_0, j = 1, 2, \dots, m.$$

Rozważmy homeomorfizm orbifoldu \mathcal{O} indukowany przez jednokrotny ślizg punktu stożkowego p wzdłuż pętli homologicznej z b_1 . Przekształca on zbiór generatorów $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ na taki zbiór generatorów, na których φ przyjmuje wartości

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\gamma_j), \underline{\varphi(a_1)\varphi(\alpha)}, \varphi(b_1), \varphi(a_i), \varphi(b_i)), \quad i = 2, 3, \dots, g_0, j = 1, 2, \dots, m.$$

W szczególności generatory różne od a_1 zostały przekształcone w taki sposób, że wartość homomorfizmu φ na nich nie uległa zmianie. Po kolejnym takim ślizgu (oczywiście tym razem ślizgamy po pętli homologicznej z obrazem generatora b_1 otrzymanym w wyniku pierwszego ślizgu) otrzymujemy z kolei generatory, które φ przekształca w

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\gamma_j), \underline{\varphi(a_1)\varphi(\alpha)^2}, \varphi(b_1), \varphi(a_i), \varphi(b_i)), \quad i = 2, 3, \dots, g_0, j = 1, 2, \dots, m.$$

Ponieważ $\varphi(\alpha)$ jest generatorem C_n , po kilku analogicznych krokach otrzymamy zbiór generatorów $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$, które φ przekształca odpowiednio w

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\gamma_j), \underline{1}, \varphi(b_1), \varphi(a_i), \varphi(b_i)), \quad i = 2, 3, \dots, g_0, j = 1, 2, \dots, m.$$

Tak otrzymany zbiór generatorów możemy teraz przekształcić, ślizgając punkt p wzdłuż pętli homologicznej z ostatnim obrazem generatora a_1 . Po jednym takim ślizgu otrzymujemy generatory $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$, na których wartości φ wynoszą odpowiednio

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\gamma_j), \underline{1}, \underline{\varphi(b_1)\varphi(\alpha)}, \varphi(a_i), \varphi(b_i)), \quad i = 2, 3, \dots, g_0, j = 1, 2, \dots, m.$$

Po dwóch

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\gamma_j), 1, \underline{\varphi(b_1)\varphi(\alpha)^2}, \varphi(a_i), \varphi(b_i)), \quad i = 2, 3, \dots, g_0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

i tak dalej. Po pewnej liczbie kroków otrzymamy zbiór generatorów, które φ przekształca odpowiednio w

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\gamma_j), 1, \underline{1}, \varphi(a_i), \varphi(b_i)), \quad i = 2, 3, \dots, g_0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Tak samo postępujemy z pozostałymi generatorami a_i, b_i dla $i = 2, 3, \dots, g_0$. \square

Uwaga 3.2.31. Przekształcając homeomorficznie zbiór generatorów

$$\mathcal{G} = \{\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{g_0}, b_{g_0}\}$$

grupy $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ spełniających relację $\alpha \left(\prod_{j=1}^m \gamma_j \right) \left(\prod_{i=1}^{g_0} [a_i, b_i] \right) = 1$ otrzymujemy zbiór generatorów

$$\mathcal{G}' = \{\alpha', \gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_m, a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, \dots, a'_{g_0}, b'_{g_0}\}$$

spełniających relację $\left(\alpha' \left(\prod_{j=1}^m \gamma'_j \right) \left(\prod_{i=1}^{g_0} [a'_i, b'_i] \right) \right)^{\pm 1} = 1$.

Lemat 3.2.32. Niech F będzie nieorientowaną powierzchnią zamkniętą, a $t : F \rightarrow F$ jej homeomorfizmem nieparzystego rzędu n , takim że przestrzeń orbit $\mathcal{O} = F / \langle t \rangle$ jest orbifoldem homeomorficznym z powierzchnią nieorientowaną rodzaju $g_0 \geq 2$ z co najmniej jednym punktem stożkowym stopnia n oraz $m \geq 0$ innymi punktami stożkowymi stopni n_j , $j = 1, 2, \dots, m$, gdzie n_j jest dzielnikiem n . Niech dane będzie przedstawienie jego orbifoldowej grupy podstawowej

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}) = \left\langle \beta, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{g_0} \mid \beta^n, \gamma_j^{n_j}, \beta \left(\prod_{j=1}^m \gamma_j \right) \left(\prod_{i=1}^{g_0} \mu_i^2 \right) \right\rangle.$$

Zbiór generujący $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ można homeomorficznie przekształcić w taki sposób, aby homomorfizm $\varphi : \pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \rightarrow C_n$ z krótkiego ciągu dokładnego indukowanego przez nakrycie $p : F \rightarrow \mathcal{O}$

$$1 \longrightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{p_*} \pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\varphi} C_n \longrightarrow 1,$$

przekształcał generatory hiperboliczne μ_i , $i = 1, 2, \dots, g_0 - 1$, w 1.

Dowód. Reprezentacja φ przekształca zbiór generatorów (β, γ_j, μ_i) , $i = 1, 2, \dots, g_0$, $j = 1, 2, \dots, m$ grupy $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ odpowiednio w

$$(\varphi(\beta), \varphi(\gamma_j), \varphi(\mu_i)), \quad i = 1, 2, \dots, g_0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Ponieważ $\varphi(\beta)$ jest elementem rzędu n w C_n , więc generuje $\langle t \rangle = C_n$. Oznaczmy przez q punkt stożkowy stopnia n , wokół którego nawija się pętla β .

Rozważamy homeomorfizm orbifoldu \mathcal{O} indukowany przez jednokrotny ślizg punktu stożkowego q wzdłuż pętli homologicznej z $\mu_1\mu_2$. Przekształca on generatory (β, γ_j, μ_i) , $i = 1, 2, \dots, g_0$, $j = 1, 2, \dots, m$ w generatory $(\beta', \gamma'_j, \mu'_i)$ spełniające

$$\begin{aligned}\varphi(\beta') &= \varphi(\beta), \\ \varphi(\gamma'_j) &= \varphi(\gamma_j), \\ \varphi(\mu'_1) &= \underline{\varphi(\mu_1)\varphi(\beta)}, \\ \varphi(\mu'_2) &= \underline{\varphi(\mu_2)\varphi(\beta)}, \\ \varphi(\mu'_i) &= \varphi(\mu_i), \quad i = 3, 4, \dots, g_0 - 1.\end{aligned}$$

Po kolejnym ślizgu (oczywiście, tym razem ślizgamy po pętli homologicznej z $\mu'_1\mu'_2$) otrzymujemy z kolei następujące wartości homomorfizmu φ na generatorach

$$\{\varphi(\beta), \varphi(\gamma_j), \underline{\varphi(\mu_1)\varphi(\beta)^2}, \underline{\varphi(\mu_2)\varphi(\beta)^2\varphi(\mu_i)} \mid j = 1, 2, \dots, m, i = 3, 4, \dots, g_0\}.$$

Ponieważ $\varphi(\beta)$ generuje C_n , po kilku krokach otrzymamy w końcu taki zbiór

$$\{\beta'', \gamma''_j, \mu''_i \mid j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, g_0\}$$

generatorów $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$, że $\varphi(\mu''_1) = 1$.

Następnie ślizgamy kolejno wzdłuż ostatnich obrazów $\mu_i\mu_{i+1}$ otrzymanych wskutek poprzednich ślizgów odpowiednią liczbę razy tak, aby otrzymać zbiór generatorów $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$, w którym i -ty generator hiperboliczny jest przekształcany przez φ w 1, $i = 1, 2, \dots, g_0 - 1$. \square

Lemat 3.2.33. *Niech F będzie nieorientowaną powierzchnią zamkniętą, a $t : F \rightarrow F$ jej homeomorfizmem nieparzystego rzędu n , takim że przestrzeń orbit $\mathcal{O} = F / \langle t \rangle$ jest nieorientowanym orbifoldem rodzaju $g_0 \geq 1$ z $m + 1 \geq 1$ punktami stożkowymi stopni n_j , $j = 0, 1, \dots, m$, gdzie n_j jest dzielnikiem n . Niech dane będzie przedstawienie jego orbifoldowej grupy podstawowej*

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}) = \left\langle \beta, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{g_0} \mid \beta^{n_0}, \gamma_j^{n_j}, \beta \left(\prod_{j=1}^m \gamma_j \right) \left(\prod_{i=1}^{g_0} \mu_i^2 \right) \right\rangle.$$

Niech $\varphi : \pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \rightarrow C_n$ będzie epimorfizmem z krótkiego ciągu dokładnego indukowanego przez nakrycie $p : F \rightarrow \mathcal{O}$

$$1 \longrightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{p_*} \pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\varphi} C_n \longrightarrow 1.$$

Zbiór $\{\beta, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{g_0}\}$ generujący $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ można homeomorficznie przekształcić w zbiór generujący $\{\beta', \gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_m, \mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_{g_0}\}$, tak aby $\varphi(\beta') = \varphi(\beta)^{-1}$, $\varphi(\gamma'_j) = \varphi(\gamma_j)$ oraz $\varphi(\mu'_i) = \varphi(\mu_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, g_0 - 1$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Dowód. Oznaczmy przez q punkt stożkowy stopnia n_0 , wokół którego nawija się pętla β . Rozważamy homeomorfizm orbifoldu \mathcal{O} indukowany przez jednokrotny ślizg punktu stożkowego q wzdłuż pętli homologicznej z μ_{g_0} . Homeomorfizm ten przekształca generatory $(\beta, \gamma_j, \mu_i, \mu_{g_0})$, $i = 1, 2, \dots, g_0 - 1$, $j = 1, 2, \dots, m$, grupy $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ w generatory $(\beta', \gamma'_j, \mu'_i, \mu'_{g_0})$ spełniające

$$\begin{aligned}\varphi(\beta') &= \underline{\varphi(\beta)^{-1}}, \\ \varphi(\gamma'_j) &= \varphi(\gamma_j), \\ \varphi(\mu'_i) &= \varphi(\mu_i), \quad i = 1, 2, \dots, g_0 - 1, \\ \varphi(\mu'_{g_0}) &= \underline{\varphi(\mu_{g_0})\varphi(\beta)}.\end{aligned}$$

W szczególności homeomorfizm ten nie wpływa na wartość reprezentacji φ na generatorach $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{g_0-1}$. Z Lematu 3.2.32 wiemy, że generatory te można wybrać tak, aby $\varphi(\mu_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots, g_0 - 1$, i wyżej opisana zmiana lokalnej orientacji wokół punktu stałego $Q \in F$ odwzorowania t , będącego przeciwobrazem punktu stożkowego q , nie zaburza tego wyboru. \square

Uwaga 3.2.34. Przypuśćmy, że przekształciliśmy zbiór

$$\mathcal{G} = \{\beta, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{g_0}\}$$

generatorów $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ za pomocą ślizgania opisanego w Lemacie 3.2.32 w zbiór generatorów

$$\mathcal{G}' = \{\beta', \gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_m, \mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_{g_0}\}$$

taki, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, g_0 - 1$ zachodzi $\varphi(\mu_i) = 1$.

Wtedy z faktu, że $\beta \left(\prod_{j=1}^m \gamma_j \right) \left(\prod_{i=1}^{g_0} \mu_i^2 \right) = 1$ wynika $\beta' \left(\prod_{j=1}^m \gamma'_j \right) \left(\prod_{i=1}^{g_0} (\mu'_i)^2 \right) = 1$. W szczególności

$$1 = \varphi \left(\beta' \gamma'_1 \gamma'_2 \cdots \gamma'_m \left(\prod_{i=1}^{g_0} (\mu'_i)^2 \right) \right) = \varphi(\beta') \varphi(\gamma'_1) \varphi(\gamma'_2) \cdots \varphi(\gamma'_m) \varphi(\mu'_{g_0})^2.$$

3.3 Orbifoldowa charakterystyka Eulera

Definicja 3.3.1. Strukturą *CW-kompleksu* na n -wymiarowym orbifoldzie \mathcal{O} nazywamy taką strukturę *CW-kompleksu* na przestrzeni $X_{\mathcal{O}}$, że każdej i -wymiarowej komórce c , $i = 0, 1, \dots, n$, można w jednoznaczny sposób przyporządkować grupę $\Gamma(c)$ spełniającą

$$\forall_{x \in \text{int } c} \exists U \ni x \exists V \subset \mathbb{R}^i U \approx V / \Gamma(c).$$

Innymi słowy, z wszystkimi punktami wewnętrznymi x komórki c stowarzyszona jest ta sama grupa Γ_x , możemy więc powiedzieć, że grupa ta jest stowarzyszona z komórką c i oznaczać ją przez $\Gamma(c)$.

W szczególności, jeżeli orbifold dwuwymiarowy \mathcal{O} posiada jakiegokolwiek punkty stożkowe lub

naróżne, to każdy z nich musi samodzielnie stanowić osobną komórkę 0-wymiarową (nie może być we wnętrzu wyżej wymiarowej komórki). Podobnie, żaden lustrzany brzeg nie może zawierać się we wnętrzu komórki dwuwymiarowej.

Będziemy zakładać, że wszystkie struktury CW -kompleksu na dowolnym orbifoldzie spełniają warunek z Definicji 3.3.1.

Definicja 3.3.2. Niech dany będzie orbifold n -wymiarowy $\mathcal{O} = (X_{\mathcal{O}}, \mathcal{U})$. *Orbifoldową charakterystyką Eulera* orbifoldu \mathcal{O} nazywamy liczbę zdefiniowaną za pomocą wzoru

$$\chi^{orb}(\mathcal{O}) = \sum_c (-1)^{\dim c} \frac{1}{|\Gamma(c)|},$$

gdzie sumujemy po wszystkich komórkach c należących do CW -kompleksu $X_{\mathcal{O}}$, a $|\Gamma(c)|$ oznacza rząd grupy $\Gamma(c)$ przyporządkowanej komórce c .

Uwaga 3.3.3. Jeżeli X jest rozmaitością n -wymiarową, to każdej komórce należącej do CW -kompleksu na X przyporządkowujemy grupę trywialną, więc jeżeli przez c_i oznaczymy zbiór komórek i -wymiarowych, to

$$\chi^{orb}(X) = \sum_c (-1)^{\dim c} \frac{1}{1} = \sum_{i=0}^n (-1)^i |c_i| = \chi(X).$$

Przykład 3.3.4. Rozważmy orbifold $(N_g; (n))$, to znaczy powierzchnię N_g z jednym punktem stożkowym stopnia n . Gdy nie ma punktu stożkowego, standardowa struktura CW -kompleksu na N_g składa się z jednej komórki dwuwymiarowej, g komórek jednowymiarowych i jednej komórki zerowymiarowej. Aby struktura CW -kompleksu na orbifoldzie $(N_g; (n))$ spełniała założenia Definicji 3.3.1, punkt stożkowy musi być samodzielną komórką. Można więc przyjąć, że jest on tą jedyną komórką 0-wymiarową. Wówczas wewnątrz komórki dwuwymiarowej c składa się z samych punktów regularnych, czyli $\Gamma(c) = \{1\}$. Podobnie wszystkim komórkom jednowymiarowym można przyporządkować grupę trywialną. Stąd

$$\chi^{orb}(N_g; (n); ()) = \frac{1}{n} - g \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 1 - g + \frac{1}{n}.$$

Wniosek 3.3.5. *Orbifoldowa charakterystyka Eulera nie musi być liczbą całkowitą (w przeciwieństwie do „zwykłej” charakterystyki Eulera dla rozmaitości). W szczególności zazwyczaj*

$$\chi^{orb}(\mathcal{O}) \neq \chi(X_{\mathcal{O}}).$$

Uwaga 3.3.6. Orbifoldowa charakterystyka Eulera powierzchni z lustrzanym brzegiem mX opisanej w Uwadze 3.1.19 jest równa charakterystyce Eulera powierzchni z brzegiem X .

Wynika to z faktu, że każda struktura CW -kompleksu na brzegu ∂X składa się z takiej samej liczby wierzchołków i krawędzi. Jeśli c_0, c_1, c_2 oznaczają kolejno zbiór komórek 0-, 1- i 2-wymiarowych na X , natomiast c_0^b, c_1^b zbiory komórek 0- i 1-wymiarowych na ∂X , to

$|c_0^b| - |c_1^b| = 0$, więc

$$\begin{aligned}\chi(X) &= |c_0| - |c_1| + |c_2| = |c_0 \setminus c_0^b| + |c_0^b| - |c_1 \setminus c_1^b| - |c_1^b| + |c_2| = \\ &= |c_0 \setminus c_0^b| + \frac{|c_0^b|}{2} - |c_1 \setminus c_1^b| - \frac{|c_1^b|}{2} + |c_2| = \chi^{orb}(mX).\end{aligned}$$

Przykład 3.3.7. Orbifold $S^2 / \langle \sigma \rangle$ z Przykładu 3.1.20 jest dyskiem z lustrzanym brzegiem.

Najprostsza struktura CW-kompleksu na tym orbifoldzie spełniająca warunki Definicji 3.3.1 składa się z trzech komórek: jednej 0-wymiarowej, której przyporządkowujemy grupę C_2 , jednej 1-wymiarowej, której również przyporządkowujemy grupę C_2 oraz jednej komórki 2-wymiarowej ze stowarzyszoną grupą trywialną. Uzyskujemy więc

$$\chi^{orb}(S^2 / \langle \sigma \rangle) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1.$$

Zauważmy ponadto, że jeżeli oznaczymy przez $p : S^2 \rightarrow S^2 / \langle \sigma \rangle$, to

$$\chi^{orb}(S^2 / \langle \sigma \rangle) = \frac{\chi(S^2)}{\deg p}.$$

Przykład 3.3.8. Orbifold $\mathcal{O} = \mathbb{D} / \langle \sigma \rangle$ z Przykładu 3.1.21 jest dyskiem z jednym lustrzanym brzegiem i jedną składową orbifoldowego brzegu będącą pełnym 1-orbifoldem. Możemy wybrać strukturę CW-kompleksu na \mathcal{O} składającą się z dwóch komórek 0-wymiarowych ze stowarzyszoną grupą C_2 , jednej komórki 1-wymiarowej ze stowarzyszoną grupą C_2 , jednej komórki 1-wymiarowej ze stowarzyszoną grupą trywialną oraz jednej komórki 2-wymiarowej ze stowarzyszoną grupą trywialną.

$$\chi^{orb}(\mathcal{O}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2} = \frac{\chi(\mathbb{D})}{|\langle \sigma \rangle|}.$$

Przykład 3.3.9. Orbifold $\mathcal{O} = \mathbb{D} / \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ z Przykładu 3.1.22 jest dyskiem z punktem narożnym stopnia n , dwoma lustrzanymi brzegami i jednym orbifoldowym brzegiem będącym pełnym 1-orbifoldem. Stąd

$$\chi^{orb}(\mathcal{O}) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2n} = \frac{\chi(\mathbb{D})}{|\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle|}.$$

Przykład 3.3.10. Orbifold $\mathcal{O} = S^2 / \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ z Przykładu 3.1.23 jest dyskiem z dwoma punktami narożnymi stopnia n i dwoma lustrzanymi brzegami. Stąd

$$\chi^{orb}(\mathcal{O}) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n} = \frac{\chi(S^2)}{|\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle|}.$$

Powyższe przykłady sugerują, że być może podobnie do charakterystyki Eulera dla rozmaitości (Twierdzenie 1.4.5), orbifoldowa charakterystyka Eulera również jest multiplikatywna. Tak jest w istocie:

Fakt 3.3.11. [66, Stwierdzenie 13.3.4] *Jeżeli $p: \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}$ jest nakryciem orbifoldowym stopnia n , to*

$$\chi^{orb}(\tilde{\mathcal{O}}) = n \cdot \chi^{orb}(\mathcal{O}).$$

Dowód. Niech $x \in X_{\mathcal{O}}$ należy do wnętrza komórki c i niech $U \approx V/\Gamma(c)$ będzie otoczeniem punktu x takim, że każda składowa spójności $p^{-1}(U)$ jest izomorficzna z $V/\Gamma(\tilde{c})$, gdzie \tilde{c} jest podniesieniem komórki c oraz $\Gamma(\tilde{c}) \leq \Gamma(c)$. Wówczas komórka c podnosi się do $|p^{-1}(x)| \cdot \frac{|\Gamma(c)|}{|\Gamma(\tilde{c})|}$ komórek wymiaru $\dim c$. Zauważmy, że liczba ta jest taka sama dla każdego $x \in X_{\mathcal{O}}$, ponieważ wraz ze zmianą x zmieniają się grupy $\Gamma(c), \Gamma(\tilde{c})$. Ponadto zależy tylko od komórki c (ze względu na warunki Definicji 3.3.1). Stopień nakrycia wyraża się więc wzorem (komórka $c \in X_{\mathcal{O}}$ dowolna)

$$n = \sum_{\tilde{c} \in p^{-1}(c)} \frac{|\Gamma(c)|}{|\Gamma(\tilde{c})|},$$

gdzie sumowanie następuje po komórkach \tilde{c} będących podniesieniami komórki c .

Na orbifoldzie nakrywającym możemy równoważnie sumować albo od razu po wszystkich komórkach c z $X_{\tilde{\mathcal{O}}}$ albo najpierw po komórkach c z $X_{\mathcal{O}}$ i potem po ich podniesieniach $\tilde{c} \in p^{-1}(c) \subset X_{\tilde{\mathcal{O}}}$. Stąd

$$\begin{aligned} \chi^{orb}(\tilde{\mathcal{O}}) &= \sum_{c \in X_{\tilde{\mathcal{O}}}} (-1)^{\dim c} \frac{1}{|\Gamma(c)|} = \\ &= \sum_{c \in X_{\mathcal{O}}} \sum_{\tilde{c} \in p^{-1}(c)} (-1)^{\dim \tilde{c}} \frac{1}{|\Gamma(\tilde{c})|} = \\ &= \sum_{c \in X_{\mathcal{O}}} \sum_{\tilde{c} \in p^{-1}(c)} (-1)^{\dim c} \frac{|\Gamma(c)|}{|\Gamma(\tilde{c})|} \cdot \frac{1}{|\Gamma(c)|} = \\ &= \sum_{c \in X_{\mathcal{O}}} (-1)^{\dim c} \cdot \frac{1}{|\Gamma(c)|} \sum_{\tilde{c} \in p^{-1}(c)} \frac{|\Gamma(c)|}{|\Gamma(\tilde{c})|} = \chi^{orb}(\mathcal{O}) \cdot n. \end{aligned}$$

□

Uwaga 3.3.12. Z każdym punktem narożnym P stopnia k_1 stowarzyszone są dwa lustrzane brzegi M, N . Możliwe są dwie sytuacje: albo $\overline{M} \cap \overline{N} = \{y\}$, albo istnieje inny punkt narożny y' stopnia k_2 taki, że $\overline{M} \cap \overline{N} = \{y, y'\}$. Jeżeli orbifold \mathcal{O} nie ma (orbifoldowego) brzegu będącego pełnym 1-orbifoldem, to możliwa jest tylko druga sytuacja i wówczas liczba punktów narożnych orbifoldu \mathcal{O} jest równa liczbie lustrzanych brzegów. Jeżeli natomiast \mathcal{O} ma l punktów narożnych oraz s pełnych 1-orbifoldów na brzegu $\partial\mathcal{O}$, to znaczy, że \mathcal{O} ma w sumie $l + s$ lustrzanych brzegów.

Wniosek 3.3.13. [11, str. 1029] *Orbifoldowa charakterystyka Eulera dwuwymiarowego orbifoldu \mathcal{O} z m punktami stożkowymi stopnia n_1, n_2, \dots, n_m , l punktami narożnymi stopnia k_1, k_2, \dots, k_l oraz s pełnymi 1-orbifoldami na brzegu $\partial\mathcal{O}$ wynosi*

$$\chi^{orb}(\mathcal{O}) = \chi(X_{\mathcal{O}}) - \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) - \frac{s}{2}.$$

W szczególności $\chi^{orb}(\mathcal{O}) \leq \chi(X_{\mathcal{O}})$ i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{O} jest powierzchnią, to znaczy $\mathcal{O} = X_{\mathcal{O}}$, lub gdy \mathcal{O} jest orbifoldem z lustrzanym brzegiem powstałym z powierzchni z brzegiem $X_{\mathcal{O}}$ w sposób opisany w Uwadze 3.1.19, to znaczy przyjmując, że otoczenie punktu brzegowego powierzchni $X_{\mathcal{O}}$ (na $X_{\mathcal{O}}$ homeomorficzne z \mathbb{R}_+^2) jest homeomorficzne z \mathbb{R}^2 / C_2 .

Dowód. Jeżeli orbifold posiada l punktów narożnych, to posiada także (co najmniej) l lustrzanych brzegów, ponieważ punkt narożny odpowiada niepustemu przekrojowi dwóch lustrzanych brzegów. Jeżeli brzeg orbifoldowy $\partial\mathcal{O}$ jest pusty, to liczba lustrzanych brzegów jest równa dokładnie l . Jeżeli liczba pełnych 1-orbifoldów na brzegu $\partial\mathcal{O}$ wynosi s , to znaczy, że w sumie lustrzanych brzegów jest $l + s$.

CW -kompleks na $X_{\mathcal{O}}$ można wybrać tak, że każdej komórce dwuwymiarowej odpowiada grupa trywialna. Komórce jednowymiarowej odpowiada grupa C_2 , jeśli jest ona lustrzanym brzegiem, lub grupa trywialna, gdy nie jest. W przypadku komórek 0-wymiarowych, powiązana z nimi grupa zależy od tego, czy jest to punkt regularny, lustrzany, stożkowy czy narożny. Jeżeli komórka 0-wymiarowa c jest

- punktem regularnym $X_{\mathcal{O}}$, to $\Gamma(c) = \{1\}$,
- punktem lustrzanym $X_{\mathcal{O}}$, to $\Gamma(c) = C_2$,
- punktem stożkowym na $X_{\mathcal{O}}$ stopnia n_j , to $\Gamma(c) = C_{n_j}$,
- punktem narożnym na $X_{\mathcal{O}}$ stopnia k_i , to $\Gamma(c) = D_{k_i}$.

Oznaczmy przez c_0 , c_1 , c_2 odpowiednio zbiór komórek 0-wymiarowych (wierzchołków), 1-wymiarowych (krawędzi) i 2-wymiarowych (ścian) w CW -kompleksie $X_{\mathcal{O}}$. Możemy założyć, że zbiór c_0 składa się wyłącznie z m punktów stożkowych, l punktów narożnych oraz $2s$ punktów lustrzanych będących końcami pełnych 1-orbifoldów na brzegu $\partial\mathcal{O}$, a zbiór c_1 wyłącznie z $l + s$ lustrzanych brzegów i s pełnych 1-orbifoldów brzegowych, to znaczy $|c_0| = m + l + 2s$ i $|c_1| = l + 2s$.

Wówczas zachodzi

$$\chi(X_{\mathcal{O}}) = |c_0| - |c_1| + |c_2|$$

oraz

$$\begin{aligned} \chi^{orb}(\mathcal{O}) &= \sum_{c \in c_0} (-1)^0 \frac{1}{|\Gamma(c)|} + \sum_{c \in c_1} (-1)^1 \frac{1}{|\Gamma(c)|} + \sum_{c \in c_2} (-1)^2 \frac{1}{1} = \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j} + \sum_{i=1}^l \frac{1}{2k_i} + \sum_{k=1}^{2s} \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{l+s}{2} + s \right) + |c_2| = \\ &= \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_1} \right) + 1 - \left(1 - \frac{1}{n_2} \right) + \dots + 1 - \left(1 - \frac{1}{n_m} \right) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k_1} \right) + 1 - \left(1 - \frac{1}{k_2} \right) + \dots + 1 - \left(1 - \frac{1}{k_l} \right) \right) - \frac{l}{2} - \frac{s}{2} + |c_2| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m - \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) + \frac{1}{2} \left(l - \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{k_i}\right)\right) - \frac{l}{2} - \frac{s}{2} + |c_2| = \\
&= m - \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) - \frac{s}{2} + |c_2| = \\
&= (m + l + 2s) - (l + 2s) - \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) - \frac{s}{2} + |c_2| = \\
&= |c_0| - |c_1| + |c_2| - \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) - \frac{s}{2} = \\
&= \chi(X_{\mathcal{O}}) - \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) - \frac{s}{2}.
\end{aligned}$$

□

Przykład 3.3.14. Niech $\pi : S_g \rightarrow S_g/G$ będzie nakryciem orbifoldowym stopnia $4g + 2$ z Przykładu 3.1.1. Wtedy

$$\chi^{\text{orb}}(S_g/G) = 2 - \left(1 - \frac{1}{4g+2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2g+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2-2g}{4g+2} = \frac{\chi(S_g)}{\deg \pi}.$$

Wniosek 3.3.15. Jeżeli t jest homeomorfizmem nieparzystego rzędu n na powierzchni N_g , to orbifold $N_g/\langle t \rangle$ nie posiada punktów narożnych ani lustrzanych brzegów (Wniosek 3.1.17), ma $m \geq 0$ punktów stożkowych oraz jest homeomorficzny z powierzchnią nieorientowalną (Fakt 1.4.32) pewnego rodzaju $g_0 \geq 1$, zatem z multiplikatywności orbifoldowej charakterystyki Eulera (Fakt 3.3.11) zachodzi

$$\frac{2-g}{n} = 2 - g_0 - \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j}\right).$$

Podobnie, jeżeli t jest homeomorfizmem nieparzystego rzędu n na powierzchni $S_{g'}$, to

$$\frac{2-2g'}{n} = 2 - 2g_0 - \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j}\right),$$

gdzie $g_0 \geq 0$ jest rodzajem orientowalnego orbifoldu $S_{g'}/\langle t \rangle$.

Przykład 3.3.16. Niech t będzie obrotem sfery jednostkowej o kąt $\frac{2\pi}{n}$, a j symetrią środkową daną wzorem $j(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Przestrzenią orbit $S^2/\langle t \rangle$ jest orbifold $\mathcal{O}_1 = (S^2; (n, n); ())$, a przestrzenią orbit $\mathcal{O}_1/\langle j \rangle$ jest orbifold $\mathcal{O}_2 = (\mathbb{R}P^2; (n); ())$. Rozważmy nakrycie $p = p_2 p_1 : S^2 \rightarrow (\mathbb{R}P^2; (n))$ dane przez odpowiednie rzutowania na przestrzenie orbit

$$S^2 \xrightarrow{p_1} (S^2; (n, n); ()) \xrightarrow{p_2} (\mathbb{R}P^2; (n); ()).$$

Wówczas $\deg p_1 = n$, $\deg p_2 = 2$ i $\deg p = 2n$ oraz orbifoldowe charakterystyki Eulera wynoszą

odpowiednio

$$\begin{aligned}\chi^{orb}(S^2) &= \chi(S^2) = 2 \\ \chi^{orb}(S^2; (n, n); ()) &= 2 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n} = \frac{\chi^{orb}(S^2)}{\deg p_1} \\ \chi^{orb}(\mathbb{R}P^2; (n); ()) &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} = \frac{\chi^{orb}(S^2; (n, n))}{\deg p_2} = \frac{\chi^{orb}(S^2)}{\deg p}.\end{aligned}$$

3.4 Rozgałęzione nakrycia sfery, dysku i pierścienia

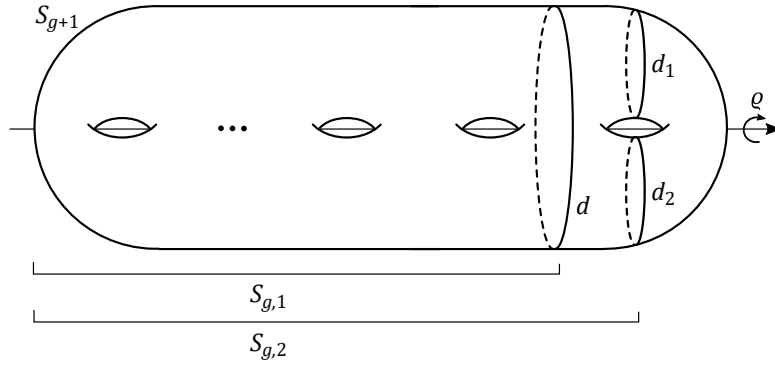
Nakrycia orbifoldowe $X \rightarrow X/G$, gdzie X jest rozmaitością, a G działa na X w sposób właściwie dyskretny, choć nie wolny, oraz kowymiar zbioru punktów osobliwych orbifoldu X/G wynosi co najmniej 2, niekiedy nazywa się *nakryciami rozgałęzionymi*.

Będziemy rozważać rozgałęzione nakrycia sfer, dysków i pierścieni, których jedynymi punktami osobliwymi są punkty stożkowe. W szczególności wyjaśnimy, skąd pochodzą wspomniane w Rozdziale 2 relacje łańcucha (Fakt 2.3.17) oraz trójzębu (Fakt 2.3.19), a także będziemy rozważać liczbę punktów stałych odwzorowań je definiujących. Wiedza ta będzie nam potrzebna w Rozdziale 5 do przyporządkowywania pierwiastkom ze skręceń Dehna sygnatury.

Pojęciem wywodzącym się z teorii powierzchni Riemanna jest pojęcie *inwolucji hiperliptycznej*. Dla zwartej powierzchni Riemanna X (tzn. jednowymiarowej rozmaitości zespolonej) rodzaju g jest to analityczny automorfizm ϱ rzędu 2 o $2g + 2$ punktach stałych. Przestrzeń orbit $X/\langle\varrho\rangle$ ma rodzaj 0, czyli jest sferą. Powierzchnie Riemanna, które posiadają taki automorfizm, nazywamy hiperliptycznymi [10]. Jeżeli X jest hiperliptyczna, to involucja hiperliptyczna ϱ jest elementem centralnym w $\text{Aut}(X)$. Zapominając o strukturze zespolonej na danej powierzchni Riemanna, możemy myśleć o ϱ jak o homeomorfizmie powierzchni topologicznej S_g , ponieważ każda zwarta powierzchnia Riemanna jest homeomorficzna z S_g dla pewnego $g \geq 0$.

Definicja 3.4.1. *Inwolucją hiperliptyczną ϱ powierzchni S_g nazywamy element rzędu 2 grupy $\mathcal{M}(S_g)$, który ma $2g + 2$ punkty stałe.*

Zanurzymy powierzchnię S_{g+1} w \mathbb{R}^3 w taki sposób, aby była ona niezmiennicza przy symetriach względem płaszczyzn xy, yx, xz . O involucji hiperliptycznej ϱ na powierzchni S_{g+1} możemy myśleć jak o obrocie S_{g+1} o kąt π wokół osi y (Rysunek 3.10). Ze względu na naturalne włożenia $S_{g,1} \hookrightarrow S_{g+1}$ i $S_{g,2} \hookrightarrow S_{g+1}$ możemy zdefiniować $\varrho_1 = \varrho|_{S_{g,1}}$ i $\varrho_2 = \varrho|_{S_{g,2}}$. Przestrznią orbit $S_{g,1}/\langle\varrho_1\rangle$ jest dysk z $2g + 1$ punktami stożkowymi stopnia 2, a przestrznią orbit $S_{g,2}/\langle\varrho_2\rangle$ dysk z $2g + 2$ punktami stożkowymi stopnia 2. Punkty stożkowe są punktami wyróżnionymi we wnętrzu powierzchni, zatem możemy utożsamiać $S_{g,1}/\langle\varrho_1\rangle$ z $S_{0,1}^{2g+1}$, a $S_{g,2}/\langle\varrho_2\rangle$ z $S_{0,1}^{2g+2}$. Na potrzeby tego rozdziału wprowadzimy oznaczenie $D_n = S_{0,1}^n$ na dysk z n punktami stożkowymi, więc $S_{g,1}/\langle\varrho_1\rangle \approx D_{2g+1}$ oraz $S_{g,2}/\langle\varrho_2\rangle \approx D_{2g+2}$ (Rysunek 3.11).

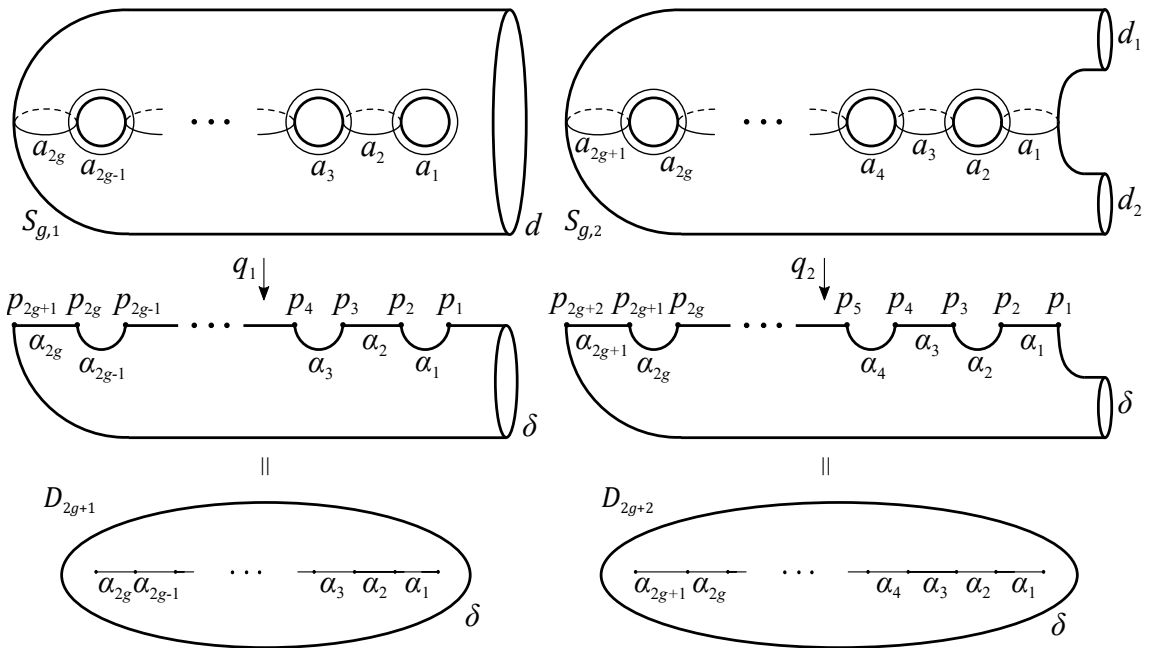


Rysunek 3.10: Inwolucja hipereliptyczna.

Niech q_1, q_2 będą odpowiednimi odwzorowaniami ilorazowymi, to znaczy

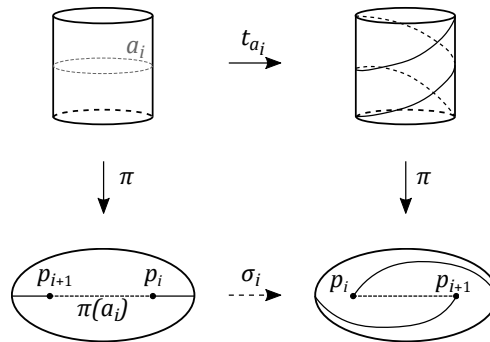
$$q_1 : S_{g,1} \rightarrow D_{2g+1},$$

$$q_2 : S_{g,2} \rightarrow D_{2g+2}.$$



Rysunek 3.11: Nakrycia rozgałęzione $q_1 : S_{g,1} \rightarrow D_{2g+1}$, $q_2 : S_{g,2} \rightarrow D_{2g+2}$.

Zauważmy, że jeżeli a jest okręgiem na powierzchni S_{g+1} , dla którego zachodzi $\varrho(a) = a$, to $t_a \varrho = \varrho t_a$. Oznaczmy przez A otoczenie regularne okręgu a takie, że $\varrho(A) = A$. Wówczas przestrzenią orbit $A / \langle \varrho|_A \rangle$ jest dysk z dwoma punktami stożkowymi stopnia 2, który utożsamiamy z D_2 . Ponieważ $t_a \varrho = \varrho t_a$, to t_a indukuje homeomorfizm $\sigma = \pi t_a \pi^{-1}$, gdzie π jest kanonicznym rzutowaniem $\pi : A \rightarrow A / \langle \varrho|_A \rangle$. Element ten zamienia miejscami dwa punkty



Rysunek 3.12: Odwzorowanie indukowane przez skręcenie Dehna komutujące z inwolucją ρ .

stożkowe, a jego kwadrat jest skręceniem Dehna względem brzegu ∂D_2 . Przy oznaczeniach z Rysunku 3.11 przyjmujemy $\sigma_i = q_l t_{a_i} q_l^{-1}$, gdzie $l = 1, 2$.

Twierdzenie 3.4.2. [19, str. 256 – 258] Grupa klas odwzorowań dysku z n nakłuciami $\mathcal{M}(S_1^n)$ jest generowana przez elementy $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, między którymi zachodzą relacje

$$(R1) \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ dla } |i - j| > 1,$$

$$(R2) \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ dla } i = 1, \dots, n - 1.$$

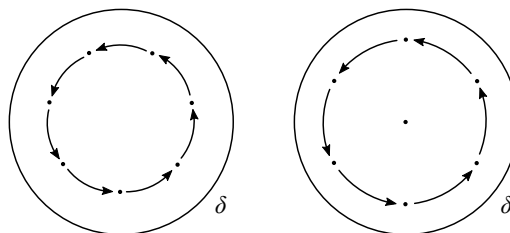
Element σ_i nazywamy *elementarną operacją warkocza* ze względu na izomorfizm $\mathcal{M}(D_n) \cong B_n$ [19, str. 256], gdzie B_n oznacza grupę warkoczy na n pasmach.

Oznaczmy brzeg dysku ∂D_n przez δ . Zauważmy, że nośnik t_δ jest rozłączny z nośnikami odwzorowań σ_i , więc skręcenie t_δ jest elementem centralnym w $\mathcal{M}(D_n)$ (Fakt 2.3.10).

Fakt 3.4.3. [19, str. 259] Dla $n \geq 3$ centrum $\mathcal{M}(D_n)$ jest generowane przez

$$(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n = t_\delta.$$

Korzystając z relacji (R1) i (R2) można dowieść, że $(\sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^{n-1} = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n = t_\delta$. Odwzorowanie $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}$ definiuje obrót rzędu n , a $\sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}$ obrót rzędu $n - 1$ na D_n (Rysunek 3.13).



Rysunek 3.13: Obroty na dysku D_n .

Oznaczmy przez ϕ_1, ϕ_2 odwzorowania

$$\phi_1 : \mathcal{M}(D_{2g+1}) \rightarrow \mathcal{M}(S_{g,1}),$$

$$\phi_2 : \mathcal{M}(D_{2g+2}) \rightarrow \mathcal{M}(S_{g,2}),$$

które każdej klasie odwzorowań dysku przyporządkowują odpowiednią klasę odwzorowań na $S_{g,1}$ lub $S_{g,2}$ odpowiednio, będącą jej podniesieniem (jest to możliwe na mocy [24, Twierdzenie 1.1] oraz [7, Twierdzenie 5], z zastrzeżeniem zawartym w [8]). Na generatorach σ_i są one zdefiniowane przez $\phi_l(\sigma_i) = t_{a_i}$, $l = 1, 2$. Ponieważ $t_{a_i}t_{a_j} = t_{a_j}t_{a_i}$ dla $|i - j| > 1$ (Fakt 2.3.14) oraz $t_{a_i}t_{a_{i+1}}t_{a_i} = t_{a_{i+1}}t_{a_i}t_{a_{i+1}}$ (Fakt 2.3.16), czyli relacje z dziedziny są spełnione w obrazie, to ϕ_1, ϕ_2 są homomorfizmami [19, str. 265].

Dla dowolnego okręgu rozdzielającego c oznaczmy przez h_c pierwiastek stopnia 2 z t_c (tak zwane *półskręcenie* względem c).

Fakt 3.4.4. [19, str. 267] *Wartość homomorfizmu ϕ_l , $l = 1, 2$, na skręceniu Dehna t_γ , gdzie γ jest okręgiem dwustronnym na D_{2g+1} lub D_{2g+2} , zależy od przeciwobrazu $q_l^{-1}(\gamma)$, $l = 1, 2$. Jeżeli przeciwobraz $q_l^{-1}(\gamma)$*

- *ma jedną składową c , to $\phi_l(t_\gamma) = h_c$,*
- *ma dwie izotopijne składowe $c_1 \simeq c_2$, to przyjmujemy $c = c_1 = c_2$ i $\phi_l(t_\gamma) = t_c^2$,*
- *ma dwie nieizotopijne składowe, to $\phi_l(t_\gamma) = t_{c_1}t_{c_2}$.*

Korzystając z relacji zachodzących w $\mathcal{M}(D_{2g+1})$, Faktu 3.4.4 oraz faktu, że ϕ_1 jest homomorfizmem, uzyskujemy

$$\begin{aligned} (\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{2g})^{2g+1} &= t_\delta \\ \phi_1((\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{2g})^{2g+1}) &= \phi_1(t_\delta) \\ (\phi_1(\sigma_1)\phi_1(\sigma_2) \cdots \phi_1(\sigma_{2g}))^{2g+1} &= h_d \\ (t_{a_1}t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}})^{2g+1} &= h_d. \end{aligned}$$

Podstawiając $k = 2g$ i podnosząc do drugiej potęgi, aby po prawej stronie równości otrzymać pełne skręcenie Dehna, otrzymujemy

$$(t_{a_1}t_{a_2} \cdots t_{a_k})^{2k+2} = t_d.$$

Analogicznie postępujemy z drugą relacją $(\sigma_1^2\sigma_2 \cdots \sigma_{2g})^{2g} = t_\delta$, by uzyskać $(t_{a_1}^2t_{a_2} \cdots t_{a_k})^{2k} = t_d$. Składając homomorfizm ϕ_1 z homomorfizmem $i_* : \mathcal{M}(S_{g,1}) \rightarrow \mathcal{M}(S_{g+1})$ indukowanym przez włożenie, dochodzimy do konkluzji, że obie relacje łańcucha dla $k = 2g$ w $\mathcal{M}(S_{g+1})$ (Fakt 2.3.17) są konsekwencją relacji definiujących obroty rzędu $2g + 1$ i $2g$ odpowiednio na dysku z $2g + 1$ nakłuciami (istnieje też relacja łańcucha długości $k = 2g$ w $\mathcal{M}(S_g)$, ponieważ istnieje włożenie $S_{g,1} \hookrightarrow S_g$). Relacje łańcucha krótszej długości $k = 2m$, $m < g$, wyprowadza się analogicznie, korzystając z włożenia podpowierzchni $S_{m,1} \hookrightarrow S_{g+1}$.

Wniosek 3.4.5. Niech $g \geq 1$ i niech $\{a_1, a_2, \dots, a_{2g}\}$ będzie łańcuchem okręgów na powierzchni $S_{g,1}$. Odwzorowanie $t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}}$ ma dwa punkty stałe na powierzchni $S_{g,1}$, natomiast $t_{a_1}^2 t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}}$ ma jeden punkt stały na $S_{g,1}$. Ponadto kąty obrotu wokół dwóch punktów stałych odwzorowania $t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}}$ na $S_{g,1}$ przy działaniu $t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}}$ są takie same.

Dowód. Obroty $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{2g}$ oraz $\sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_{2g}$ mają po jednym punkcie stałym – w środku dysku. Punkt stały odwzorowania $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{2g}$ jest punktem regularnym, dlatego podnosi się do dwóch punktów stałych odwzorowania $t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}}$ na $S_{g,1}$. Ponieważ te dwa punkty stałe są podniesieniem jednego punktu z dysku, to $t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}}$ działa wokół nich tak samo, w szczególności kąty obrotu wokół nich przy działaniu $t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}}$ są takie same.

Nakrycie orbifoldowe $S_{g,1} \rightarrow D_{2g+1}$ ma stopień 2 oraz punkt stały $\sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_{2g}$ jest punktem stożkowym stopnia 2, stąd podnosi się do jednego punktu stałego odwzorowania $t_{a_1}^2 t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}}$ na $S_{g,1}$. \square

Relacje łańcucha dla $k = 2g + 1$ można otrzymać, korzystając z homomorfizmu $\phi_2 : \mathcal{M}(D_{2g+2}) \rightarrow \mathcal{M}(S_{g,2})$. Istotnie,

$$\begin{aligned} (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{2g+1})^{2g+2} &= t_\delta & (\sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_{2g+1})^{2g+1} &= t_\delta \\ (\phi_2(\sigma_1) \phi_2(\sigma_2) \cdots \phi_2(\sigma_{2g+1}))^{2g+2} &= \phi_2(t_\delta) & \left((\phi_2(\sigma_1))^2 \phi_2(\sigma_2) \cdots \phi_2(\sigma_{2g+1}) \right)^{2g+1} &= \phi_2(t_\delta) \\ (t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g+1}})^{2g+2} &= t_{d_1} t_{d_2} & (t_{a_1}^2 t_{a_2} \cdots t_{a_{2g+1}})^{2g+1} &= t_{d_1} t_{d_2} \\ (t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_k})^{k+1} &= t_{d_1} t_{d_2} & (t_{a_1}^2 t_{a_2} \cdots t_{a_k})^k &= t_{d_1} t_{d_2}. \end{aligned}$$

Takie same rozumowania można przeprowadzić dla łańcuchów krótszej długości $k = 2m + 1$, $m < g$, korzystając z włożenia $S_{m,2} \hookrightarrow S_{g+1}$.

Wniosek 3.4.6. Odwzorowanie $t_{a_1}^2 t_{a_2} \cdots t_{a_{2g+1}}$ ma 1 punkt stały na $S_{g,2}$.

Uwaga 3.4.7. Jeżeli wzdłuż okręgów d_1, d_2 na $S_{g,2}$ wkleimy dyski, to $t_{a_1}^2 t_{a_2} \cdots t_{a_{2g+1}}$ ma trzy punkty stałe na otrzymanej powierzchni S_g .

Zauważmy, że w podobny sposób można otrzymać relację trójzębu (Fakt 2.3.19) jako podniesienie relacji z nakłutego pierścienia.

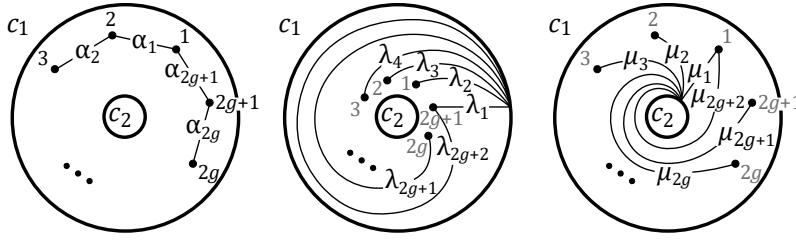
Fakt 3.4.8. Niech A_n oznacza pierścień kołowy z $n \geq 2$ punktami wyróżnionymi p_1, p_2, \dots, p_n , to znaczy powierzchnię $S_{0,2}^n$. Oznaczmy jej dwie składowe brzegu przez c_1, c_2 . Niech z będzie okręgiem ograniczającym składową brzegu c_2 oraz punkt wyróżniony p_1 . Wówczas

$$(t_{c_2}^{-1} t_z \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n = t_{c_1} t_{c_2}^{-1}.$$

Dowód. Wprowadźmy oznaczenie $R = t_{c_2}^{-1} t_z \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}$. Niech α_i będzie łukiem łączącym punkt p_i z punktem p_{i+1} tak jak przedstawiono na Rysunku 3.14 dla $n = 2g + 1$.

Dla każdego $i = 1, 2, \dots, n - 1$ zachodzi $R(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$ oraz $R(\alpha_n) = \alpha_1$. Stąd

$$R^n(\alpha_i) = \alpha_i = t_{c_1} t_{c_2}^{-1}(\alpha_i) \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (3.1)$$

Rysunek 3.14: Łuki na A_{2g+1} .

Niech $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}$ będą łukami takimi, jak przedstawiono na Rysunku 3.14. Wtedy dla $i = 1, 2, \dots, n$ zachodzi $R(\lambda_i) = \lambda_{i+1}$ oraz $R(\mu_i) = \mu_{i+1}$, co implikuje

$$R^n(\lambda_1) = \lambda_{n+1} = t_{c_1} t_{c_2}^{-1}(\lambda_1) \quad (3.2)$$

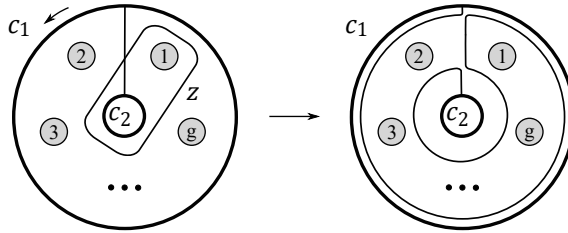
$$R^n(\mu_1) = \mu_{n+1} = t_{c_1} t_{c_2}^{-1}(\mu_1). \quad (3.3)$$

Z równań (3.1), (3.2) i (3.3) wynika, że R^n i $t_{c_1} t_{c_2}^{-1}$ działają tak samo na łukach ze zbioru

$$\mathcal{C} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \lambda_1, \lambda_2\}.$$

Ponieważ \mathcal{C} spełnia założenia Metody Alexandra (Twierdzenie 2.2.5), to $R^n = t_{c_1} t_{c_2}^{-1}$. \square

Wniosek 3.4.9. Niech $g \geq 2$ i niech c_1, c_2 będą składowymi brzegu powierzchni $N_{g,2}$. Ustalmy orientację w otoczeniu regularnym okręgu c_1 , a w otoczeniu regularnym przyjmijmy orientację zgodnie z konwencją ustaloną w Uwadze 2.4.6. Niech z będzie okręgiem dwustronnym ograniczającym $N_{1,1}$ zgodnie z Rysunkiem 3.15. Wówczas



Rysunek 3.15: Obrót rzędu g na powierzchni $N_{g,2}$. Zaznaczono okrąg dwustronny z ograniczający $N_{1,1}$.

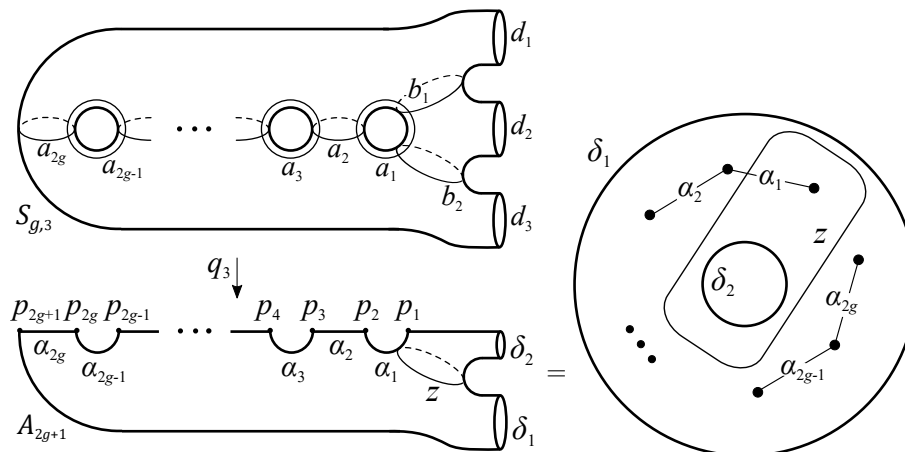
$$(t_{c_2}^{-1} t_z u_1 u_2 \cdots u_{g-1})^g = t_{c_1} t_{c_2}^{-1}.$$

Dowód. Teza jest natychmiastowym wnioskiem z Faktów 3.4.8 i 2.4.5. \square

Zwróćmy uwagę, że obrót rzędu n na pierścieniu A_n nie ma punktów stałych.

Wniosek 3.4.10. Odwzorowanie $t_{c_2}^{-1} t_z u_1 u_2 \cdots u_{g-1}$ na $N_{g,2}$ zdefiniowane we Wniosku 3.4.9, nie ma punktów stałych na $N_{g,2}$.

Zanurzymy powierzchnię $S_{g,3}$ w \mathbb{R}^3 tak, aby była niezmiennicza przy symetriach względem płaszczyzn xy, yz i oznaczmy przez ρ_3 inwolucję obracającą $S_{g,3}$ o kąt π wokół osi y . Przestrzenią orbit $S_{g,3}/\langle\rho_3\rangle$ jest pierścień z $2g+1$ punktami stożkowymi stopnia 2, który możemy utożsamiać z A_{2g+1} . Oznaczmy jego dwie składowe brzegu przez δ_1, δ_2 (Rysunek 3.16).



Rysunek 3.16: Nakrycie rozgałęzione $q_3 : S_{g,3} \rightarrow A_{2g+1}$.

Niech $\phi_3 : \mathcal{M}(A_{2g+1}) \rightarrow \mathcal{M}(S_{g,3})$ będzie homomorfizmem⁵ przyporządkowującym elementowi $\mathcal{M}(A_{2g+1})$ jego podniesienie. W szczególności $\phi_3(\sigma_i) = t_{a_i}$, oraz na mocy Faktu 3.4.4, $\phi_3(t_z) = t_{b_1}t_{b_2}$, $\phi_3(t_{\gamma_1}) = t_{c_1}t_{c_3}$, $\phi_3(t_{\gamma_2}) = h_{c_2}$. Korzystając z Faktu 3.4.8, otrzymujemy

$$\begin{aligned} (t_{\gamma_2}^{-1}t_z\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2g})^{2g+1} &= t_{\gamma_1}t_{\gamma_2}^{-1} \\ t_{\gamma_2}^{-1-2g}(t_z\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2g})^{2g+1} &= t_{\gamma_1}t_{\gamma_2}^{-1} \\ (t_z\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2g})^{2g+1} &= t_{\gamma_1}t_{\gamma_2}^{2g} \\ (\phi_3(t_z)\phi_3(\sigma_1)\phi_3(\sigma_2)\cdots\phi_3(\sigma_{2g}))^{2g+1} &= \phi_3(t_{\gamma_1})\phi_3(t_{\gamma_2})^{2g} \\ (t_{b_1}t_{b_2}t_{a_1}t_{a_2}\cdots t_{a_{2g}})^{2g+1} &= t_{d_1}t_{d_3}(h_{d_2})^{2g} \\ (t_{b_1}t_{b_2}t_{a_1}t_{a_2}\cdots t_{a_{2g}})^{2g+1} &= t_{d_1}t_{d_2}^g t_{d_3}. \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę na podobieństwo dowodów Faktów 2.3.19 i 3.4.8. Nie jest ono przypadkowe. Przyjmując $n = 2g + 1$ łuki α_i są dokładnie obrazami okręgów a_i przy rzutowaniu z $S_{g,3}$ na przestrzeń orbit $S_{g,3}/\langle\rho_3\rangle$. Podobnie, łuki λ_i i μ_i na A_{2g+1} (Rysunek 3.14) są obrazami łuków λ_i, μ_i na $S_{g,3}$ (Rysunek 2.9).

Wniosek 3.4.11. *Odwzorowanie $t_{b_1}t_{b_2}t_{a_1}t_{a_2}\cdots t_{a_{2g}}$ nie ma punktów stałych na $S_{g,3}$.*

Wniosek 3.4.12. *Jeżeli okręgi d_1, d_3 na powierzchni $S_{g,3}$ zakleimy dyskami, to $t_{b_1}t_{b_2}t_{a_1}t_{a_2}\cdots t_{a_{2g}}$ na powstałej w ten sposób powierzchni $S_{g,1}$ ma dwa punkty stałe, wokół których lokalnie działa jak obrót o kąt $\frac{2\pi}{2g+1}$.*

⁵Nie pokazaliśmy, że ϕ_3 jest homomorfizmem, ani że każdą klasę odwzorowań z $\mathcal{M}(A_{2g+1})$ można podnieść do $\mathcal{M}(S_{g,3})$, dlatego dowód relacji trójzębu przez podnoszenie relacji z pierścienia nie jest kompletny. Stąd w pracy pojawia się dowód wykorzystujący metodę Alexandra, Fakt 2.3.19. Tę interpretację relacji trójzębu zamieszczamy jako ciekawostkę.

Wniosek 3.4.13. *Kąt obrotu wokół jedyne go punktu stałego odwzorowania $t_{a_1}^2 t_{a_2} \cdots t_{a_{2g+1}}$ na $S_{g,2}$ przy działaniu $t_{a_1}^2 t_{a_2} \cdots t_{a_{2g+1}}$ wynosi $\frac{2\pi g}{2g+1}$.*

Dowód. Odwzorowanie $t_{a_1}^2 t_{a_2} \cdots t_{a_{2g+1}}$ na $S_{g,2}$ to degeneracja odwzorowania $t_{b_1} t_{b_2} t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}}$ na $S_{g,3}$ – składową brzegu d_2 z Rysunku 3.16 degenerujemy do punktu. Złożenie $t_{b_1} t_{b_2}$ według oznaczeń na Rysunku 3.16 odpowiada $t_{a_1}^2$ według oznaczeń w prawej części Rysunku 3.11, a t_{a_i} według oznaczeń na Rysunku 3.16 odpowiada $t_{a_{i+1}}$ według oznaczeń w prawej części Rysunku 3.11, $i = 1, 2, \dots, 2g$. Punkt powstały z degeneracji okręgu d_2 po zrzutowaniu za pomocą q_2 na D_{2g+2} jest punktem stożkowym stopnia 2 będącym punktem stałym obrotu rzędu $2g+1$ na D_{2g+2} . Podnosi się on do punktu wewnątrz okręgu ograniczonego przez okrąg d_2 , zatem $t_{a_1}^2 t_{a_2} \cdots t_{a_{2g+1}}$ działa wokół niego jak obrót o $\frac{2\pi g}{2g+1}$. \square

Wniosek 3.4.14. *Kąt obrotu wokół obydwu punktów stałych odwzorowania $t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}}$ na $S_{g,1}$ wynosi $\frac{2\pi}{2g+1}$.*

Dowód. Według oznaczeń na Rysunku 3.16 zachodzi

$$(t_{b_1} t_{b_2} t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}})^{2g+1} = t_{d_1} t_{d_2}^g t_{d_3}.$$

Pokazaliśmy wcześniej, że jeżeli zakleimy okręgi d_1, d_3 dyskami, to

$$(t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}})^{2g+1} = h_{d_2}.$$

Punkty stałe odwzorowania $t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}}$ na $S_{g,1}$ znajdują się wewnątrz dysków ograniczonych przez d_1, d_3 i lokalne kąty obrotu wokół nich przy działaniu $t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}}$ wynoszą tyle, ile przy działaniu $t_{b_1} t_{b_2} t_{a_1} t_{a_2} \cdots t_{a_{2g}}$, czyli $\frac{2\pi}{2g+1}$. \square

Rozdział 4

Pierwiastki ze skręceń Dehna w $\mathcal{M}(N_g)$

Podobnie jak w Sekcji 2 [46] definiujemy *sygnaturę pierwiastka stopnia n* jako krotkę

$$(T, n, g_0, (a, b); (c_1, n_1), (c_2, n_2), \dots, (c_m, n_m)),$$

gdzie $T \in \{A, B\}$, liczby n, g_0, n_j są liczbami naturalnymi, a, b są resztami z dzielenia przez n , a liczby c_j są dla każdego $j = 1, 2, \dots, m$ resztami z dzielenia przez n_j . Ponadto zakładamy, że

(D1) $n > 1$ jest liczbą nieparzystą, dla każdego j zachodzi $n_j > 1$ oraz każda liczba n_j jest dzielnikiem n ,

(D2) $\text{nwd}(a, n) = \text{nwd}(b, n) = 1$ oraz $\text{nwd}(c_j, n_j) = 1$ dla każdego j .

Jeżeli sygnatura dodatkowo spełnia warunek

$$(D3A) \quad T = A, \quad g_0 \geq 1 \quad \text{oraz} \quad a + b = ab \pmod{n} \quad \text{lub} \quad b - a = ab \pmod{n},$$

to mówimy, że jest ona typu A.

Jeżeli sygnatura dodatkowo spełnia warunki

$$(D3B) \quad T = B, \quad g_0 \geq 0 \quad \text{oraz} \quad b - a = ab \pmod{n},$$

$$(D4B) \quad a + b + \sum_{j=1}^m \frac{n}{n_j} c_j = 0 \pmod{n},$$

to mówimy, że jest ona typu B.

Rodzajem sygnatury nazywamy liczbę g zdefiniowaną następującym wzorem

$$g = \begin{cases} g_0 n + \sum_{j=1}^m \frac{n}{n_j} (n_j - 1), & \text{jeżeli sygnatura jest typu A,} \\ 2g_0 n + \sum_{j=1}^m \frac{n}{n_j} (n_j - 1), & \text{jeżeli sygnatura jest typu B.} \end{cases}$$

Dwie sygnatury typu B są *równoważne*, jeżeli różnią się o inwolucję

$$(a, b, c_1, c_2, \dots, c_m) \mapsto (-b, -a, -c_1, -c_2, \dots, -c_m),$$

zmianę uporządkowania par $(c_1, n_1), \dots, (c_m, n_m)$ lub złożenie tych dwóch operacji.

Dwie sygnatury typu A są *równoważne*, jeżeli różnią się o skończoną liczbę następujących operacji:

- (1) zamianę a z b (tylko gdy obie sygnatury spełniają warunek $a + b = ab \pmod{n}$),
- (2) zmianę (a, b) na $(-b, -a)$ (tylko gdy obie sygnatury spełniają warunek $b - a = ab \pmod{n}$),
- (3) zmianę znaku przy b lub którymkolwiek z c_1, c_2, \dots, c_m ,
- (4) zmianę uporządkowania par $(c_1, n_1), \dots, (c_m, n_m)$.

Operacje te będziemy nazywać *operacjami zachowującymi klasy równoważności sygnatur typu A*.

4.1 Warunki na istnienie pierwiastka stopnia n

Twierdzenie 4.1.1. [57] *Niech c będzie nierozdzielającym okręgiem dwustronnym na powierzchni nieorientowalnej N_{g+2} rodzaju $g + 2 \geq 3$. Oznaczmy przez t_c skręcenie Dehna względem c przy ustalonej orientacji otoczenia regularnego okręgu c . Dla danego $n > 1$ klasy sprzężoności pierwiastków stopnia n z t_c są w jednoznacznej odpowiedniości z klasami równoważności sygnatur pierwiastków stopnia n , rodzaju g i typu*

$$\begin{cases} A & \text{jeżeli } N_{g+2} \setminus c \text{ jest nieorientowalna,} \\ B & \text{jeżeli } N_{g+2} \setminus c \text{ jest orientowalna.} \end{cases}$$

Uwaga 4.1.2. Oczywiście, sygnatury typu A odpowiadają pierwiastkom ze skręceń Dehna typu A, a sygnatury typu B – pierwiastkom ze skręceń Dehna typu B (porównaj: Definicja 2.5.4).

Dowód. Idea dowodu jest taka sama jak w przypadku Twierdzenia 2.1 w [46], jednak konieczne są istotne zmiany związane z nieorientowalnością powierzchni, zwłaszcza w przypadku A.

Najpierw pokażemy, że każdemu pierwiastkowi ze skręcenia Dehna na N_{g+2} odpowiada pewna sygnatura rodzaju g . Oznaczmy przez U_c otoczenie regularne okręgu c i ustalmy w nim orientację. Niech dany będzie pierwiastek h stopnia n ze skręcenia Dehna t_c . Ponieważ t_c nie zmienia orientacji U_c ani nie zamienia stron okręgu c , a h jest pierwiastkiem nieparzystego stopnia z t_c (Fakt 2.5.7), to h również nie zmienia orientacji w U_c ani nie zamienia stron c . Z Wniosku 2.3.9 zachodzi $h(c) = c$, więc h można faktoryzować elementami grupy $\mathcal{M}(N_{g+2} \setminus c)$. Powierzchnia $N_{g+2} \setminus c$, powstała przez rozcięcie N_{g+2} wzdłuż c , ma dwie składowe brzegu c_1, c_2 . Jeżeli zakleimy je dyskami, otrzymamy powierzchnię zamkniętą F , która jest albo powierzchnią nieorientowalną rodzaju g (*przypadek A*), albo powierzchnią orientowalną rodzaju $\frac{g}{2}$ (*przypadek B*). Pierwiastek h indukuje element t należący

do $\mathcal{M}(F)$. Skręcenia Dehna t_{c_1}, t_{c_2} są trywialne w $\mathcal{M}(F)$, ponieważ c_1, c_2 ograniczają dyski na F (Fakt 2.3.3), więc t jest rzędu n , to znaczy $t^n = 1$ w $\mathcal{M}(F)$. Na mocy Twierdzenia o Problemie Relizacji Nielsena (Twierdzenie 2.1.2) możemy założyć, że t jest homeomorfizmem rzędu n w grupie $\text{Homeo}(F)$.

Odwzorowanie t ma co najmniej dwa punkty stałe znajdujące się wewnątrz dysków ograniczonych przez c_1, c_2 , które będziemy oznaczać przez P i Q . Ponieważ pierwiastek h indukuje na powierzchni $N_{g+2} \setminus c$ odwzorowanie będące prawdziwym homeomorfizmem rzędu n , to w otoczeniach punktów P, Q na powierzchni N_g odwzorowanie t lokalnie jest obrotem rzędu n . Niekoniecznie jest to obrót o kąt $\frac{2\pi}{n}$, lecz o jakąś względnie pierwszą z n jego wielokrotność. Oznaczmy przez $\frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi l}{n}$ kąty obrotu przy działaniu t wokół punktów P i Q odpowiednio.

Działanie grupy $\langle t \rangle \cong C_n$ na powierzchni F indukuje nakrycie orbifoldowe $p : F \rightarrow F / \langle t \rangle$. Orbifold $F / \langle t \rangle$ oznaczmy przez \mathcal{O} , a jego rodzaj przez g_0 . Topologicznie jest on powierzchnią (Wniosek 3.1.15). Ze względu na to, że $t \neq 1$ w $\mathcal{M}(F)$, $n > 1$ jest liczbą nieparzystą oraz F jest zwarta, to jego jedynymi punktami osobliwymi są punkty stożkowe (nie ma lustrzanych brzegów ani punktów narożnych – Wniosek 3.1.17) i jest ich skończenie wiele. Istnieją dwa punkty stożkowe p, q stopnia n odpowiadające punktom P, Q na F oraz $m \geq 0$ punktów stożkowych x_1, x_2, \dots, x_m , stopni n_1, n_2, \dots, n_m , gdzie dla każdego $j = 1, 2, \dots, m$ liczba n_j dzieli n . Są one obrazami punktów stałych odwzorowania $t^{\frac{n}{n_j}}$, to znaczy przeciwobraz punktu x_j względem nakrycia p składa się z $\frac{n}{n_j}$ punktów $\{X_j^1, X_j^2, \dots, X_j^{\frac{n}{n_j}}\}$, które są cyklicznie permutowane przez t i każdy z punktów X_j^e , $e = 1, 2, \dots, \frac{n}{n_j}$, posiada stabilizator generowany przez $t^{\frac{n}{n_j}}$.

Dla ustalonego j kąt obrotu wokół każdego punktu X_j^e , przy działaniu homeomorfizmu $t^{\frac{n}{n_j}}$ musi być taki sam, ponieważ przy założeniu, że punkty $\{X_j^1, X_j^2, \dots, X_j^{\frac{n}{n_j}}\}$ są uporządkowane w taki sposób, że $t(X_j^e) = X_j^{e+1}$, działanie $t^{\frac{n}{n_j}}$ wokół X_j^e jest sprzężone z działaniem $t^{\frac{n}{n_j}}$ wokół X_j^{e+1} przy pomocy homeomorfizmu t . Możemy więc założyć, że dla każdego $j = 1, \dots, m$ kąt obrotu przy działaniu homeomorfizmu $t^{\frac{n}{n_j}}$ wokół punktów $\{X_j^e\}$ wynosi $\frac{2\pi y_j}{n_j}$, gdzie $\text{nwd}(y_j, n_j) = 1$ (y_j musi być względnie pierwsze z n_j , ponieważ x_j jest stopnia n_j , czyli lokalnie nad x_j odwzorowanie t jest obrotem rzędu n_j).

Ponadto nakryciu orbifoldowemu $p : F \rightarrow \mathcal{O}$ odpowiada następujący krótki ciąg dokładny (Uwaga 3.2.28)

$$1 \longrightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{p_*} \pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\varphi} C_n \longrightarrow 1,$$

gdzie $C_n = \langle t \rangle$ jest grupą przekształceń nakrywających. Homomorfizm φ można wyznaczyć, podnosząc elementy $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ do elementów $\pi_1(F)$ (Fakt 1.4.23, Uwaga 3.2.28). Podniesienia te są jednoznacznie wyznaczone na mocy Wniosku 3.2.17.

Przypadek B: F jest powierzchnią orientowalną rodzaju $\frac{g}{2}$. Orientacja otoczenia regularnego U_c okręgu c na N_{g+2} jest ustalona. Wybierzmy na F orientację taką, aby w otoczeniu punktu P była zgodna z orientacją dziedziczną z U_c . Wówczas w otoczeniu punktu Q orientacja jest przeciwna do orientacji dziedzicznej z U_c , gdyż aby z powierzchni $S_{\frac{g}{2}, 2}$ zrekonstruować powierzchnię N_{g+2} okręgi c_1, c_2 musimy skleić ze zmianą orientacji (tak jak powstaje butelka Kleina z powierzchni bocznej walca). Ponadto ponieważ t_c nie zmienia orientacji w U_c , to t jest zachowującym orientację

homeomorfizmem F . Kąty obrotu przy działaniu t wokół punktów P i Q wynoszą odpowiednio $\frac{2\pi k}{n}$ i $\frac{2\pi l}{n}$, gdzie $\text{nwd}(k, n) = \text{nwd}(l, n) = 1$. Ponieważ $h^n = t_c$, to ich różnica musi być równa $\frac{2\pi}{n} + 2s\pi$ dla pewnego $s \in \mathbb{Z}$, to znaczy otrzymujemy warunek (4.1)

$$\begin{aligned} \frac{2\pi k}{n} - \frac{2\pi l}{n} &= \frac{2\pi}{n} + 2s\pi & s \in \mathbb{Z} \\ 2\pi k - 2\pi l &= 2\pi + 2ns\pi \\ k - l &= 1 + sn \\ k - l &= 1 \pmod{n}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Uwaga 4.1.3. W otoczeniach punktów P, Q nie jest możliwe odróżnienie obrotu o kąt α od obrotu o kąt $\alpha + 2s\pi$, $s \in \mathbb{Z}$. Stąd po prawej stronie pierwszej równości pojawia się $\frac{2\pi}{n} + 2s\pi$ a nie tylko $\frac{2\pi}{n}$. Oczywiście, po podniesieniu do n -tej potęgi różne obroty skutkują innym wynikiem: jeśli dla t_1 mamy

$$\frac{2\pi k_1}{n} - \frac{2\pi l_1}{n} = \frac{2\pi}{n},$$

a dla t_2

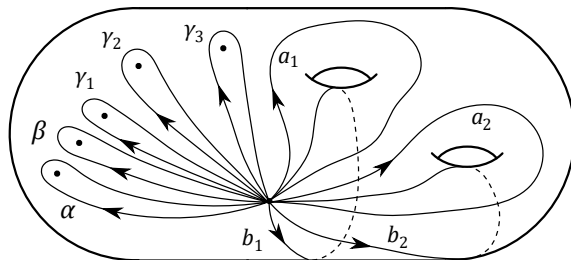
$$\frac{2\pi k_2}{n} - \frac{2\pi l_2}{n} = \frac{2\pi}{n} + 2s\pi,$$

to $h_1^n = t_c$ ale $h_2^n = t_c^{s^n+1}$ (gdzie h_1, h_2 to odpowiednie homeomorfizmy na N_{g+2} odpowiadające homeomorfizmom t_1, t_2 powierzchni F odpowiednio). Zauważmy jednak, że powstająca niejednoznaczność sprowadza się do przemnożenia przez t_c^{sn} . Stąd choć h_2 nie jest pierwiastkiem stopnia n z t_c , to $h_2 t_c^{-s}$ jest (korzystamy tu z tego, że t_c jest przemienny z h_2 – Wniosek 2.3.10). Dlatego równość $k - l = 1$ rozpatrujemy modulo n .

Możemy wybrać generatory orbifoldowej grupy podstawowej $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ tak, aby jej przedstawienie za pomocą generatorów i relacji było następujące

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}) = \left\langle \alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_m, a_1, b_1, \dots, a_{g_0}, b_{g_0} \mid \alpha^n, \beta^n, \gamma_1^{n_1}, \dots, \gamma_m^{n_m}, \alpha\beta\gamma_1 \cdots \gamma_m \prod_{j=1}^{g_0} [a_j, b_j] \right\rangle.$$

Generatory a_i, b_i , $i = 1, 2, \dots, g_0$ generują grupę podstawową powierzchni S_{g_0} , a pętle α, β, γ_j można wybrać tak, aby jednokrotnie nawijały się wokół punktu stożkowego p, q, x_j odpowiednio (Rysunek 4.1). Pętle α^n, β^n podnoszą się do pętli wokół P, Q na powierzchni F – czyli są elementami



Rysunek 4.1: Możliwe generatory $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ w przypadku B, gdy $m = 3$ i $g_0 = 2$.

$\pi_1(F)$. Możemy również założyć, że podniesienie pętli α^n jest dodatnio zorientowane.

Podniesieniem pętli α, β są ścieżki na F stanowiące $\frac{1}{n}$ -tą pętli na F wokół punktów P, Q odpowiednio. Z kolei generatory γ_j podnoszą się do $\frac{1}{n_j}$ -tej pętli na F wokół punktów $\{X_j^e\}$. Liczby k, l są względnie pierwsze z n , zatem są odwracalne w grupie $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. To znaczy istnieją $a, b \in \mathbb{Z}_n$ takie, że $ak = 1 \pmod n$ oraz $bl = 1 \pmod n$. Podobnie y_j jest względnie pierwsze z n_j , więc istnieje $c_j \in \mathbb{Z}_{n_j}$, takie że $c_j y_j = 1 \pmod{n_j}$. Jasne jest, że

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= t^a, & \text{gdzie } ak &= 1 \pmod n, \\ \varphi(\beta) &= t^b, & \text{gdzie } bl &= 1 \pmod n, \\ \varphi(\gamma_j) &= \left(t^{n/n_j}\right)^{c_j}, & \text{gdzie } c_j y_j &= 1 \pmod{n_j}.\end{aligned}$$

W szczególności otrzymujemy $\text{nwd}(a, n) = \text{nwd}(b, n) = \text{nwd}(c_j, n_j) = 1$, czyli warunek (D2), a ponadto równanie (4.1) implikuje warunek (D3B), gdyż

$$\begin{aligned}abk - abl &= ab \pmod n \\ b - a &= ab \pmod n.\end{aligned}$$

Z długiej relacji w przedstawieniu $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ wynika

$$\begin{aligned}1 &= \varphi \left(\alpha \beta \gamma_1 \cdots \gamma_m \prod_{j=1}^{g_0} [a_j, b_j] \right) = t^a t^b \left(t^{\frac{n}{n_1}}\right)^{c_1} \cdots \left(t^{\frac{n}{n_m}}\right)^{c_m} \\ a + b + c_1 \cdot \frac{n}{n_1} + \cdots + c_m \cdot \frac{n}{n_m} &= 0 \pmod n,\end{aligned}$$

czyli otrzymujemy warunek (D4B).

F , jako powierzchnia orientowalna rodzaju $\frac{g}{2}$, ma charakterystykę Eulera równą $2 - g$. Korzystając multiplikatywności orbifoldowej charakterystyki Eulera (Fakt 3.3.11), otrzymujemy

$$\begin{aligned}2 - g &= n \left(2 - 2g_0 - 2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) \right) \\ g &= 2g_0 n + \sum_{j=1}^m \frac{n}{n_j} (n_j - 1).\end{aligned}$$

Po prawej stronie ostatniej równości znajduje się wzór na rodzaj sygnatury typu B, zatem otrzymana sygnatura ma rzeczywiście rodzaj g .

Teraz pokażemy, że każdy element $h' \in \mathcal{M}(N_{g+2})$, który jest sprzężony z h oraz $(h')^n = t_c$, ma sygnaturę równoważną z sygnaturą pierwiastka h . Przypuśćmy, że h ma sygnaturę

$$(B, n, g_0, (a, b); (c_1, n_1), \dots, (c_m, n_m)).$$

Z faktu, że h i h' są sprzężone natychmiastowo wynika, że sygnatura pierwiastka h' zaczyna się

od (B, n, g_0, \dots) . Ponadto h i h' mają tyle samo punktów stałych oraz dla wszystkich dzielników n_j liczby n odwzorowania $h^{\frac{n}{n_j}}$ i $(h')^{\frac{n}{n_j}}$ mają tyle samo punktów stałych. Stąd orbifoldy $F/\langle t \rangle$ i $F/\langle t' \rangle$ mają tyle samo punktów stożkowych każdego stopnia (t' oznacza oczywiście indukowany przez h' homeomorfizm $F \rightarrow F$) oraz musi być zachowywany zbiór $\left\{ \left| \frac{2\pi k}{n} \right|, \left| \frac{2\pi l}{n} \right|, \left| \frac{2\pi y_1}{n_1} \right|, \dots, \left| \frac{2\pi y_m}{n_m} \right| \right\}$ nieskierowanych kątów obrotu wokół przeciwobrazów punktów stożkowych. Po ewentualnej zmianie uporządkowania par (c'_j, n'_j) , pierwiastek h' ma sygnaturę

$$(B, n, g_0, (a', b'); (c'_1, n_1), \dots, (c'_m, n_m)),$$

gdzie $\{|a'|, |b'|\} = \{|a|, |b|\}$ oraz dla każdego $j = 1, 2, \dots, m$ zachodzi $|c'_j| = |c_j|$.

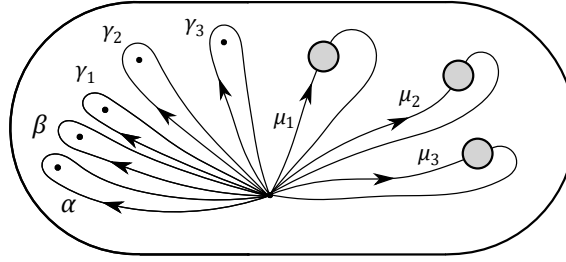
Oznaczmy element sprzęgający h i h' w $\mathcal{M}(N_{g+2})$ przez f , to znaczy $h' = fhf^{-1}$, $f \in \mathcal{M}(N_{g+2})$. Możliwe są dwie sytuacje: albo f zamienia miejscami dwie strony okręgu c , albo nie. W pierwszym przypadku indukowany przez niego homeomorfizm powierzchni $S_{\frac{g}{2}}$ nie zamienia punktów P, Q miejscami, więc jedyne co może się zmienić w sygnaturze h' względem sygnatury h to kolejność par $(c_1, n_1), \dots, (c_m, n_m)$. Zachowywany jest więc zbiór $\left\{ \frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi l}{n}, \frac{2\pi y_1}{n_1}, \dots, \frac{2\pi y_m}{n_m} \right\}$ skierowanych kątów obrotu wokół przeciwobrazów punktów stożkowych. Jeżeli f zamienia miejscami strony okręgu c , to indukowany przez niego homeomorfizm $S_{\frac{g}{2}}$ zamienia miejscami punkty P i Q , a więc zmienia orientację, ponieważ w otoczeniu punktu Q orientacja jest przeciwna do orientacji dziedziczonej z U_c . Oznacza to, że w sygnaturze h' para (a, b) z sygnatury h jest zmieniona na $(-b, -a)$, a ponadto liczby c_j są zmienione na $-c_j$ (oczywiście, modulo n lub n_j odpowiednio), może się również zmienić ich kolejność. Kąty obrotu $\left\{ \frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi l}{n}, \frac{2\pi y_1}{n_1}, \dots, \frac{2\pi y_m}{n_m} \right\}$ wokół przeciwobrazów punktów stożkowych odpowiadające sygnaturze pierwiastka h zamieniają się więc na $\left\{ -\frac{2\pi k}{n}, -\frac{2\pi l}{n}, -\frac{2\pi y_1}{n_1}, \dots, -\frac{2\pi y_m}{n_m} \right\}$. W obu przypadkach otrzymujemy wniosek, że sygnatura h' jest równoważna z sygnaturą h .

Przypadek A: F jest powierzchnią nieorientowalną rodzaju g . Wybierzmy w otoczeniu punktu P orientację dziedziczoną z otoczenia regularnego U_c okręgu c na N_{g+2} . Zauważmy, że w tym przypadku nie możemy nic powiedzieć na temat orientacji w otoczeniu punktu Q : może ona być zarówno zgodna z orientacją dziedziczoną z U_c (gdy $N_{g+2} \setminus c$ skleamy z powrotem do N_{g+2} zachowując orientację – tak jak powstaje torus z powierzchni bocznej walca) lub przeciwna (gdy skleamy $N_{g+2} \setminus c$, zmieniając orientację).

Podobnie jak w poprzednim przypadku, jedynymi punktami osobliwymi orbifoldu $\mathcal{O} = F/\langle t \rangle$ są punkty stożkowe (Wniosek 3.1.17). Można więc wybrać generatory orbifoldowej grupy podstawowej $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ tak, aby miała ona następujące przedstawienie za pomocą generatorów i relacji

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}) = \left\langle \alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{g_0} \mid \alpha^n, \beta^n, \gamma_1^{n_1}, \dots, \gamma_m^{n_m}, \alpha\beta\gamma_1 \cdots \gamma_m \prod_{i=1}^{g_0} \mu_i^2 \right\rangle.$$

Przykładowy zbiór generatorów został przedstawiony na Rysunku 4.2. Tak samo jak w przypadku B możemy wybrać generatory α, β tak, aby ich podniesienia były $\frac{1}{n}$ -tą pętli na F , a γ_j tak, aby ich podniesienia były $\frac{1}{n_j}$ -tą pętli na F oraz założyć, że podniesienie α^n jest dodatnio zorientowane



Rysunek 4.2: Możliwe generatory $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ w przypadku A gdy $m = 3$ i $g_0 = 3$.

względem orientacji w otoczeniu punktu P dziedziczonej z otoczenia regularnego U_c okręgu c na N_{g+2} . W szczególności w przypadku A również otrzymujemy warunki (D1) i (D2) oraz

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= t^a, & \text{gdzie } ak &= 1 \pmod{n}, \\ \varphi(\beta) &= t^b, & \text{gdzie } bl &= 1 \pmod{n}, \\ \varphi(\gamma_j) &= \left(t^{n/n_j}\right)^{c_j}, & \text{gdzie } c_j y_j &= 1 \pmod{n_j}.\end{aligned}$$

Podniesienie pętli β^n na F może być pętlą zorientowaną dodatnio względem orientacji w otoczeniu punktu Q dziedziczonej z U_c lub nie. W pierwszym przypadku kąty obrotu przy działaniu t wokół punktów P, Q muszą spełniać

$$\begin{aligned}\frac{2\pi k}{n} + \frac{2\pi l}{n} &= \frac{2\pi}{n} + 2\pi s, & s &\in \mathbb{Z} \\ k + l &= 1 \pmod{n}, \\ b + a &= ab \pmod{n}\end{aligned}$$

a w drugim

$$\begin{aligned}\frac{2\pi k}{n} - \frac{2\pi l}{n} &= \frac{2\pi}{n} + 2\pi s, & s &\in \mathbb{Z} \\ k - l &= 1 \pmod{n}, \\ b - a &= ab \pmod{n}\end{aligned}$$

otrzymujemy więc warunek (D3A).

Różnica między warunkami (D3B) a $b - a = ab \pmod{n}$ w (D3A) polega wyłącznie na tym, że w (D3B) mamy $g_0 \geq 0$, czyli gdy F jest orientowalna, to orbifoldem ilorazowym może być dowolna powierzchnia orientowalna, w tym także sfera z punktami stożkowymi. Gdy F jest powierzchnią nieorientowalną warunek $g_0 \geq 1$ w (D3A) jest konieczny, ponieważ Fakty 1.4.32 i 3.2.4 implikują, że orbifold \mathcal{O} jest homeomorficzny z powierzchnią nieorientowalną, a więc nie może mieć rodzaju równego zero.

Korzystając z multiplikatywności orbifoldowej charakterystyki Eulera (Fakt 3.3.11),

otrzymujemy

$$2 - g = n \left(2 - g_0 - 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j} \right) \right)$$

$$g = g_0 n + \sum_{j=1}^m \frac{n}{n_j} (n_j - 1),$$

zatem otrzymana sygnatura faktycznie ma rodzaj g .

Niech $h' \in \mathcal{M}(N_{g+2})$ będzie sprzężony z h oraz $(h')^n = t_c$. Załóżmy, że h ma sygnaturę

$$(A, n, g_0, (a, b); (c_1, n_1), \dots, (c_m, n_m)).$$

Wtedy, podobnie jak w przypadku B, możemy wywnioskować, że po ewentualnej zmianie uporządkowania par (c'_j, n'_j) pierwiastek h' ma sygnaturę

$$(A, n, g_0, (a', b'); (c'_1, n_1), \dots, (c'_m, n_m))$$

dla pewnego zbioru liczb $\{a', b', c'_1, c'_2, \dots, c'_m\}$ spełniających (D1), (D2) i (D3A), takiego że $\{|a'|, |b'|\} = \{|a|, |b|\}$ oraz $|c'_j| = |c_j|$ dla każdego $j = 1, 2, \dots, m$.

Niech $f \in \mathcal{M}(N_{g+2})$ będzie elementem takim, że $h' = fhf^{-1}$. Jeżeli f nie zamienia miejscami stron okręgu c , to indukowany przez niego homeomorfizm powierzchni N_g nie zamienia ze sobą punktów P, Q i musi zachowywać lokalną orientację wokół punktu P , a stąd $(a', b') = (a, b)$. Jeżeli f zamienia miejscami strony okręgu c , to indukowany przez niego homeomorfizm powierzchni N_g zamienia ze sobą punkty P i Q . Wtedy jeżeli $a+b = ab \pmod n$, to $(a', b') = (b, a)$, a jeżeli $b-a = ab \pmod n$, to $(a', b') = (-b, -a)$. W obu przypadkach otrzymujemy wniosek, że sygnatury h i h' są równoważne.

Teraz pokażemy, że klasie równoważności sygnatur odpowiada klasa sprzężoności pierwiastków. Zacniemy od jednej sygnatury

$$(T, n, g_0, (a, b); (c_1, n_1), (c_2, n_2), \dots, (c_m, n_m)),$$

rodzaju g , gdzie $T \in \{A, B\}$ (w zależności od tego wybieramy odpowiedni wzór na rodzaj sygnatury) i pokażemy, że odpowiada jej pierwiastek stopnia n ze skręcenia Dehna t_c . Konstruujemy orbifold \mathcal{O} , który jest homeomorficzny z powierzchnią orientowalną rodzaju g_0 , gdy $T = B$, lub z powierzchnią nieorientowalną rodzaju g_0 , gdy $T = A$. Ponadto \mathcal{O} ma 2 punkty stożkowe stopnia n oraz m punktów stożkowych stopnia n_j dla $j = 1, 2, \dots, m$. Z sygnatury, a dokładnie z wartości a, b, c_j można również odtworzyć reprezentację

$$\varphi : \pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \rightarrow C_n.$$

W przypadku B mamy $\varphi(\alpha) = t^a$, $\varphi(\beta) = t^b$, $\varphi(\gamma_j) = \left(t^{\frac{n}{n_j}}\right)^{c_j}$, a z Lematu 3.2.30 wynika, że nie zmieniając wartości φ na α, β, γ_j , możemy założyć, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, g_0$ zachodzi

$\varphi(a_i) = \varphi(b_i) = 1$.

W przypadku A mamy $\varphi(\alpha) = t^a$, $\varphi(\beta) = t^b$, $\varphi(\gamma_j) = \left(t^{\frac{n}{n_j}}\right)^{c_j}$, a na mocy Lematu 3.2.32 możemy założyć, że

$$\varphi(\mu_1) = \varphi(\mu_2) = \dots = \varphi(\mu_{g_0-1}) = 1.$$

Długa relacja w przedstawieniu $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ implikuje

$$1 = \varphi\left(\alpha\beta\gamma_1\cdots\gamma_m\prod_{i=1}^{g_0}\mu_i^2\right) = t^a t^b \left(t^{\frac{n}{n_1}}\right)^{c_1} \cdots \left(t^{\frac{n}{n_m}}\right)^{c_m} \varphi(\mu_{g_0})^2$$

W szczególności $\varphi(\mu_{g_0})$ jest jednoznacznie wyznaczone przez a, b, c_j, n_j . Oznaczając $S = a + b + c_1 \cdot \frac{n_1}{n} + \dots + c_m \cdot \frac{n}{n_m} \pmod n$, otrzymujemy

$$\varphi(\mu_{g_0})^{-2} = t^S.$$

Ponieważ $\text{nwd}(2, n) = 1$, to istnieje $r \in \mathbb{Z}_n$ takie, że $2r = 1 \pmod n$ i wtedy $\varphi(\mu_{g_0}) = t^{-rS}$.

Jądru $\ker \varphi$ odpowiada nakrycie orbifoldowe $p : F \rightarrow \mathcal{O}$ takie, że $\ker \varphi = p_*(\pi_1^{orb}(F))$. Wiemy, że orbifold \mathcal{O} jest dobry (Uwaga 3.2.6), to znaczy posiada nakrycie będące powierzchnią bez osobliwości, nie oznacza to jednak, że orbifold F jest właśnie takim dobrym nakryciem. Zauważmy, że grupa podstawowa dowolnej zamkniętej powierzchni różnej od płaszczyzny rzutowej jest beztorsyjna. Przypadek $F = N_1$ można wykluczyć, ponieważ płaszczyzna rzutowa nie może być nakryciem nieparzystego stopnia $n \geq 3$ powierzchni nieorientowalnej z co najmniej dwoma punktami stożkowymi, ponieważ z multiplikatywności orbifoldowej charakterystyki Eulera otrzymujemy sprzeczność

$$\begin{aligned} 1 &= n \left(2 - g_0 - 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j} \right) \right) = \\ &= 2 - ng_0 - n \cdot \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j} \right) \leq 2 - ng_0 \leq 2 - 3g_0 \leq 2 - 3 = -1. \end{aligned}$$

Aby więc pokazać, że F jest powierzchnią bez osobliwości, wystarczy pokazać, że jądro $\ker \varphi$ jest beztorsyjne. Zauważmy, że istotnie tak jest, ponieważ każda skończona podgrupa $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ jest sprzężona z podgrupą cykliczną generowaną przez α, β lub γ_j , więc warunek (D2) implikuje, że $\ker \varphi$ jest beztorsyjne (wszystkie nietrywialne potęgi α, β, γ_j są bowiem przekształcane w nietrywialne elementy C_n).

W przypadku B powierzchnia F jest orientowalna i ma rodzaj $\frac{g}{2} = g_0n + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{n}{n_j} (n_j - 1)$, natomiast w przypadku A jest nieorientowalna (ponieważ n jest nieparzyste – Fakty 1.4.32 oraz 3.2.4) i ma rodzaj $g = g_0n + \sum_{j=1}^m \frac{n}{n_j} (n_j - 1)$. Ponadto wiadomo, że nakrycie $p : F \rightarrow \mathcal{O}$ jest indukowane przez właściwie dyskretne działanie cyklicznej podgrupy homeomorfizmów $\langle t : F \rightarrow F \mid t^n = 1 \rangle$ takiej, że $2 + \frac{n}{n_1} + \frac{n}{n_2} + \dots + \frac{n}{n_m}$ punktów na F ma przy jej działaniu nietrywialny stabilizator (dwa punkty mają stabilizator rzędu n , $\frac{n}{n_1}$ punktów ma stabilizator rzędu n_1 i tak dalej).

Wycinamy teraz z powierzchni F dyski wokół punktów P, Q będących przeciwobrazami dwóch wyróżnionych punktów stożkowych p, q stopnia n . Powstałe w ten sposób składowe brzegu sklejamy ze sobą, zachowując lub zmieniając orientację, w zależności od tego czy spełniony jest warunek $b - a = ab \pmod n$, czy $a + b = ab \pmod n$ (w przypadku B dopuszczamy tylko pierwszą opcję). Warunki (D3A) i (D3B) zapewniają, że w każdym przypadku możliwe jest rozszerzenie otrzymanego homeomorfizmu t powierzchni F do homeomorfizmu h powierzchni N_{g+2} , którego n -ta potęga jest pojedynczym skręceniem Dehna t_c , czyli z sygnatury udało się skonstruować pierwiastek h stopnia n z t_c .

Teraz udowodnimy, że startując od dwóch równoważnych sygnatur

$$(T, n, g_0, (a, b); (c_1, n_1), (c_2, n_2), \dots, (c_m, n_m))$$

$$(T, n, g_0, (a', b'); (c'_1, n_1), (c'_2, n_2), \dots, (c'_m, n_m))$$

otrzymujemy sprzężone pierwiastki $h, h' \in \mathcal{M}(N_{g+2})$ z t_c . Dla prostoty zakładamy, że stopnie n_j są już odpowiednio uporządkowane.

Konstruujemy dwa orbifoldy $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ takiego samego rodzaju g_0 (oba orientowalne, lub oba nieorientowalne w zależności od T), o takiej samej liczbie punktów stożkowych danego stopnia (czyli orbifoldy homeomorficzne), reprezentacje $\varphi : \pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \rightarrow \langle t \mid t^n \rangle$, $\varphi' : \pi_1^{orb}(\mathcal{O}') \rightarrow \langle t' \mid (t')^n \rangle$ oraz odpowiadające im powierzchnie nakrywające F, F' . Pokażemy, że przy dobrym doborze generatorów i korzystając z naturalnego izomorfizmu $\langle t' \mid (t')^n \rangle \cong \langle t \mid t^n \rangle$ reprezentacje φ i φ' są sobie równe, to znaczy odpowiednie generatory przekształcają na takie same potęgi t .

Jeżeli $T = B$, to możemy założyć, że $\varphi(a_i) = \varphi'(a'_i) = 1$ oraz $\varphi(b_i) = \varphi'(b'_i) = 1$ (Lemat 3.2.30). Ponadto sygnatury są równoważne, więc albo $a' = a$, albo $a' = -b$. Jeżeli $a' = a$, to automatycznie $b' = b$ oraz $c'_j = c_j$. Teza jest więc oczywista. Jeżeli natomiast $a' = -b$, to $b' = -a$ i $c_j = -c_j$, więc wystarczy zamienić rolami generatory α', β' oraz zmienić orientację na (orientowalnym) orbifoldzie \mathcal{O}' , by otrzymać równość reprezentacji φ i φ' .

Jeżeli $T = A$, to na obu orbifoldach wybieramy takie generatory grupy podstawowej, aby $\varphi(\mu_i) = \varphi'(\mu'_i) = 1$ dla $i = 1, 2, \dots, g_0 - 1$ (Lemat 3.2.32). Jeżeli (a, b) i (a', b') spełniają warunek (D3A) z innym znakiem, to korzystamy z Lematu 3.2.33. Ślizgając punktem stożkowym stopnia n , któremu odpowiada generator β' , wzdłuż pętli homologicznej z μ'_{g_0} , przekształcamy zbiór generatorów w $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}')$ w taki sposób, że dla nowych generatorów $\varphi'(\beta'') = \varphi'(\beta')^{-1}$ oraz $\varphi'(\mu''_{g_0}) = \varphi'(\mu'_{g_0})\varphi'(\beta')$, a wartość φ' na pozostałych generatorach nie ulega zmianie. Wtedy b' zmienia się oczywiście na $b'' = -b'$, a' nie ulega zmianie i otrzymujemy odpowiednio

$$a + b = ab = a' - b' = a' + b''$$

lub

$$b - a = ab = -b' - a' = b'' - a'.$$

W szczególności możemy zakładać, że obie sygnatury spełniają warunek (D3A) albo ze znakiem $+$, albo ze znakiem $-$. W obydwu sytuacjach możemy otrzymać $\varphi'(\alpha') = \varphi(\alpha)$, $\varphi'(\beta') = \varphi(\beta)$,

zamieniając ewentualnie rolami generatory α' i β' .

Jeżeli chodzi o generatory wokół punktów stożkowych x_j , to albo dla danego $j = 1, 2, \dots, m$ od razu zachodzi $\varphi'(\gamma'_j) = \varphi(\gamma_j)$, albo $\varphi'(\gamma'_j) = \varphi(\gamma_j)^{-1}$. W tym drugim przypadku ślizgając punktem stożkowym, któremu odpowiada pętla γ'_j , wzdłuż pętli homologicznej z μ'_{g_0} tak, jak opisano w Lemacie 3.2.33, otrzymujemy generator γ''_j o własności $\varphi'(\gamma''_j) = \varphi'(\gamma'_j)^{-1} = \varphi(\gamma_j)$.

Ostatecznie $\varphi'(\mu'_{g_0}) = \varphi(\mu_{g_0})$, ponieważ zachodzi równość na pozostałych generatorach, a długa relacja w przedstawieniu $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ implikuje, że wartość $\varphi(\mu_{g_0})$ jest jednoznacznie wyznaczona przez a, b, c_j, n_j .

Rozpatrujemy teraz homeomorfizm $\omega : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ taki, że indukowany przez niego homomorfizm $\omega_* : \pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \rightarrow \pi_1^{orb}(\mathcal{O}')$ spełnia $\omega_*(\alpha) = \alpha'$, $\omega_*(\beta) = \beta'$, $\omega_*(\gamma_j) = \gamma'_j$ i tak dalej. Ponieważ dla ω_* zachodzi

$$\varphi' \omega_* = \varphi$$

to ω podnosi się do homeomorfizmu $\tilde{\omega} : F \rightarrow F$ takiego, że $\tilde{\omega} t \tilde{\omega}^{-1} = t'$. Ponadto ω można wybrać w taki sposób, aby $\tilde{\omega}$ przekształcał $N_{g+2} \setminus U_c$ w $N_{g+2} \setminus U'_c$, a wówczas możemy $\tilde{\omega}$ rozszerzyć do homeomorfizmu powierzchni N_{g+2} , który sprzęga pierwiastki h i h' . \square

Twierdzenie 4.1.4. [57] *Niech c będzie dwustronnym okręgiem nierozdzielającym na powierzchni nieorientowalnej N_{g+2} rodzaju $g + 2$.*

1. *Jeżeli $N_{g+2} \setminus c$ jest nieorientowalna, to skręcenie Dehna t_c ma nietrywialny pierwiastek w $\mathcal{M}(N_{g+2})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g = 3$ lub $g \geq 5$.*
2. *Jeżeli $N_{g+2} \setminus c$ jest orientowalna, to istnieje dodatnia liczba całkowita g' taka, że $g = 2g'$ oraz skręcenie Dehna t_c ma nietrywialny pierwiastek w $\mathcal{M}(N_{g+2})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g' \geq 2$, to znaczy $g \geq 4$.*

Dowód. Istnienie pierwiastków udowodnimy w Rozdziale 5 — najpierw algebraicznie (Twierdzenia 5.1.2 i 5.1.3), a potem geometrycznie w Podrozdziale 5.2. Teraz skupimy się na dowodzie, że pierwiastki nie istnieją gdy $g = 0, 1, 2, 4$ i $N_{g+2} \setminus c$ jest nieorientowalna oraz gdy $g = 0, 2$ i $N_{g+2} \setminus c$ jest orientowalna (żeby $N_{g+2} \setminus c$ była orientowalna, g musi być parzyste – Tabela 1.1 – dlatego natychmiastowo eliminujemy opcje $g = 1, 3$).

1. Z warunków (D1) i (D3A), nieparzystości stopnia pierwiastka (Fakt 2.5.5) oraz wzoru na rodzaj sygnatury typu A wynika

$$g = g_0 n + \sum_{j=1}^m \frac{n}{n_j} (n_j - 1) = n \left(g_0 + \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j} \right) \right) \geq 3 \left(1 + \frac{2m}{3} \right) \geq 3.$$

Jeżeli $g = 4$, to korzystając z wzoru na rodzaj sygnatury łatwo wywnioskować, że $g_0 = 1$, $n = 3$ i $m > 0$, ale wówczas musiałoby zachodzić $\sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j} \right) = \frac{1}{3}$, co nie jest możliwe, gdyż dla $m > 0$ taka suma jest nie mniejsza od $\frac{2}{3}$.

2. Jeżeli $g = 0$ to mówimy o skręceniu Dehna na butelce Kleina, w której wszystkie elementy są pierwotne [43], dokładniej

$$\mathcal{M}(N_2) = \langle t_{a_1}, y_1 \mid t_{a_1}^2, y_1^2, (t_{a_1} y_1)^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Stąd każde skręcenie Dehna w $\mathcal{M}(N_2)$ jest albo trywialne, albo rzędu 2, więc nie ma nietrywialnego pierwiastka. Implikuje to również, że nie może się zdarzyć, że g_0 i m są równocześnie równe zero. Ze wzoru na rodzaj sygnatury typu B otrzymujemy

$$g = 2g_0 n + \sum_{j=1}^m \frac{n}{n_j} (n_j - 1) = n \left(2g_0 + \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j} \right) \right).$$

W szczególności jeśli $g_0 > 0$, to $g \geq 6$. Zatem dla $g = 2$ musiałyby zachodzić $g_0 = 0$, $m = 1$, $n = n_1 = 3$. Zauważmy jednak, że wówczas warunek (D3B) implikuje $(a, b) = (2, 1)$, więc otrzymujemy sprzeczność z koniunkcją warunków (D2) i (D4B), ponieważ nie jest możliwe znalezienie liczby c_1 względnie pierwszej z 3, dla której $a + b + c_1 = 0 \pmod{3}$.

□

4.2 Pierwiastki maksymalnego stopnia

W przypadku skręceń Dehna na powierzchniach orientowalnych McCullough i Rajeevsarathy [46], a także Monden [47] wykazali, że stopień $2g + 1$ pierwiastków skonstruowanych przez Margalita i Schleimera w $\mathcal{M}(S_{g+1})$ [45] jest maksymalny. W przypadku nieorientowalnym problem wyznaczenia pierwiastków maksymalnego stopnia jest znacznie bardziej skomplikowany. W szczególności nie jest możliwe podanie konkretnego wzoru na maksymalny stopień pierwiastka ze skręcenia Dehna w $\mathcal{M}(N_{g+2})$ dla dowolnego g , ponieważ duże znaczenie ma rozkład g na czynniki pierwsze. Z tego powodu przedstawiamy jedynie częściowe wyniki – konkretną wartość maksymalnego stopnia pierwiastka ze skręcenia Dehna w $\mathcal{M}(N_{g+2})$ dla wybranych rodzajów g , a dla pozostałych górne i dolne oszacowanie na tę wartość.

Twierdzenie 4.2.1. [57] *Niech c będzie dwustronnym okręgiem nierozdzielającym na powierzchni N_{g+2} , gdzie $g = 3$ lub $g \geq 5$, takim że $N_{g+2} \setminus c$ jest nieorientowalna. Oznaczmy przez N maksymalny możliwy stopień pierwiastka ze skręcenia Dehna t_c .*

1. *Jeżeli g jest liczbą nieparzystą, to $N = g$.*
2. *Jeżeli $g = 2^l \cdot k$ dla pewnych liczb nieparzystych $l, k \geq 1$, to $N = \frac{2^l + 1}{3} \cdot k = \frac{g}{3} \left(1 + \frac{1}{2^l} \right)$. W szczególności $\frac{g}{3} < N \leq \frac{g}{2}$.*
3. *Niech $g = 2^l k_1 k_2$ dla pewnej liczby parzystej $l \geq 2$ oraz liczb nieparzystych $k_1, k_2 \geq 1$ takich, że $2^l k_1 + 1 = 0 \pmod{3}$ i niech k_1 będzie najmniejsze możliwe (dla ustalonego g). Wtedy $N = \frac{2^l k_1 + 1}{3} \cdot k_2 = \frac{g}{3} \left(1 + \frac{1}{2^l k_1} \right)$. W szczególności $\frac{g}{3} < N < \frac{g}{2}$.*

4. Jeżeli g nie spełnia założeń punktów 1 – 3 oraz istnieją nieparzyste liczby $1 \leq k \leq \frac{g}{3}$ oraz $k_1, k_2 \geq 1$ takie, że $g + k = k_1 k_2$, $k_1 + 1 = 0 \pmod{4}$ oraz $k \mid \frac{(k_1+1)k_2}{4}$, to $\frac{g}{4} < \frac{(k_1+1)k_2}{4} = \frac{g+k+k_2}{4} \leq N < \frac{g}{3}$.
5. Jeżeli g nie spełnia założeń punktów 1 – 4 oraz $g = 2^2 \cdot k$ dla pewnej nieparzystej liczby k , to $N = k = \frac{g}{4}$.
6. Jeżeli g nie spełnia założeń punktów 1 – 5, to $\frac{g}{6} < N < \frac{g}{4}$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że z warunków (D1) i (D3A) rodzaj g sygnatury typu A spełnia

$$g = n \left(g_0 + \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j} \right) \right) \geq n g_0 \geq n, \quad (4.2)$$

więc dla dowolnego g zachodzi $N \leq g$.

1. Zakładamy, że g jest nieparzysta. Szukanym pierwiastkiem stopnia g jest pierwiastek następującej o sygnaturze typu A

$$(T, n, g_0, (a, b); (c_j, n_j)_{j=1}^m) = (A, g, 1, (2, -2);) \sim (A, g, 1, (2, 2);).$$

Jego konstrukcja została przedstawiona dla $n = 3$ w Przykładzie 5.2.2, a jej uogólnienie dla dowolnego n w Uwadze 5.2.3 (przyjmujemy oczywiście $g_0 = 1, m = 0$).

2. Liczba n jest nieparzysta (Fakt 2.5.5), więc z warunku (D1) dla każdego $j = 1, 2, \dots, m$ liczba n_j jest nieparzysta, czyli $n - \frac{n}{n_j}$ jest parzysta. Z równości

$$g = n g_0 + \sum_{j=1}^m \left(n - \frac{n}{n_j} \right)$$

wynika więc, że jeśli g jest parzysta, to g_0 również, a wówczas warunek (D3A) implikuje $g_0 \geq 2$. W szczególności dla parzystego g zachodzi $N \leq \frac{g}{2}$.

Przypuśćmy najpierw, że $l = 1$, to znaczy $g = 2k$ dla nieparzystej liczby k . Wtedy istnieje pierwiastek stopnia $\frac{g}{2} = k$ o sygnaturze

$$(T, n, g_0, (a, b); (c_j, n_j)_{j=1}^m) = (A, k, 2, (2, -2);) \sim (A, k, 2, (2, 2).)$$

Jego konstrukcja została przedstawiona dla $n = 3$ w Przykładzie 5.2.2, a jej ogólnienie dla dowolnego n w Uwadze 5.2.3 ($g_0 = 2, m = 0$).

Zauważmy ponadto, że $n = \frac{g}{2}$ implikuje $g_0 = 2$ i $m = 0$, zatem $g = 2n$. Liczba n jest nieparzysta (Fakt 2.5.5), stąd maksymalny stopień pierwiastka wynosi $\frac{g}{2}$ faktycznie wyłącznie w przypadku g postaci $g = 2k$ dla liczby nieparzystej k . Dla $l > 1$ oraz w kolejnych podpunktach pierwiastkom maksymalnego stopnia będą więc odpowiadały albo sygnatury o $g_0 \geq 4$ (parzyste) albo $g_0 = 2$ i $m \geq 1$. Jeżeli $g_0 \geq 4$, to równanie (4.2)

implikuje $n \leq \frac{g}{4}$. Ponieważ szukamy pierwiastków maksymalnego stopnia, przypuśćmy, że $g_0 = 2$. Wtedy jeżeli $m \geq 2$, to

$$g = 2n + \sum_{j=1}^m m \left(n - \frac{n}{n_j} \right) \geq 2n + 2 \left(n - \frac{n}{3} \right) = \frac{10}{3}n > 3n,$$

a więc $n < \frac{g}{3}$. Jeżeli $m = 1$, to dla $g = 2^l k$ otrzymujemy

$$g = 2^l k = 3n - \frac{n}{n_1} = \frac{n}{n_1} (3n_1 - 1)$$

i z nieparzystości $\frac{n}{n_1}$ wynika, że $3n_1 - 1 = 2^l s$ dla nieparzystej liczby s takiej, że $\frac{n}{n_1} = \frac{k}{s}$. Stąd

$$n = n_1 \cdot \frac{n}{n_1} = \frac{2^l s + 1}{3} \cdot \frac{k}{s} = \frac{2^l + \frac{1}{s}}{3} \cdot k \leq \frac{2^l + 1}{3} \cdot k$$

oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $s = 1$, czyli $k = \frac{n}{n_1}$. Z drugiej strony, istnieje sygnatura typu A z $n = \frac{2^l + 1}{3} \cdot k$, $g_0 = 2$, $m = 1$, $n_1 = \frac{2^l + 1}{3}$ oraz $(a, b, c_1) = (2, 2, 1)$.

3. Podobnie jak w poprzednim punkcie możemy założyć, że $g = 2$, $m = 1$ i wtedy

$$n = \frac{2^l s + 1}{3} \cdot \frac{k_1 k_2}{s} = \frac{2^l + \frac{1}{s}}{3} \cdot k_1 k_1$$

dla liczby s takiej, że $\frac{k_1 k_2}{s} = \frac{n}{n_1}$ oraz $n_1 = \frac{2^l s + 1}{3} \in \mathbb{Z}$. Z założenia o k_1 najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą o tej własności jest $s = k_1$, zatem

$$n \leq \frac{2^l k_1 + 1}{3} \cdot \frac{k_1 k_2}{k_1} = \frac{2^l k_1 + 1}{3} \cdot k_2.$$

Stopień ten jest realizowany przez sygnaturę typu A z $g_0 = 2$, $m = 1$, $n_1 = \frac{2^l k_1 + 1}{3}$ oraz $(a, b, c_1) = (2, 2, 1)$.

4. Jeżeli g nie spełnia założeń punktów 1 – 3, to albo $g_0 \geq 4$, albo $g_0 = 2$ i $m \geq 2$. W obu przypadkach otrzymujemy $n < \frac{g}{3}$. Jeżeli dodatkowo $g + k = k_1 k_2$ dla liczb nieparzystych $1 \leq k \leq \frac{g}{3}$, $k_1, k_2 \geq 1$ takich, że $k_1 + 1 = 0 \pmod{4}$ oraz $k \mid \frac{(k_1 + 1)k_2}{4}$, to istnieje sygnatura typu A z $n = \frac{(k_1 + 1)k_2}{4} = \frac{g + k + k_2}{4}$, $g_0 = 2$, $m = 2$, $n_1 = \frac{k_1 + 1}{4}$, $n_2 = \frac{n}{k}$ oraz $(a, b, c_1, c_2) = (2, 2, 1, 1)$.

5. Jeżeli $g = 4k$ dla nieparzystej liczby k , to istnieje sygnatura typu A z $n = k$, $g_0 = 4$, $m = 0$ oraz $(a, b) = (2, 2)$. Wystarczy pokazać, że $n \leq \frac{g}{4}$, jeżeli g nie spełnia założeń punktów 1 – 4.

Jak zauważyliśmy wcześniej, jeżeli g nie spełnia założeń punktów 1 – 3, to albo $g_0 \geq 4$ albo $g_0 = 2$ i $m \geq 2$. W pierwszym przypadku natychmiast otrzymujemy $n \leq \frac{g}{4}$, przypuśćmy więc, że $g_0 = 2$. Jeżeli $m \geq 3$, to

$$g = 2n + \sum_{j=1}^m \left(n - \frac{n}{n_j} \right) \geq 2n + 3 \left(n - \frac{n}{3} \right) = 4n,$$

czyli $n \leq \frac{g}{4}$, zostaje więc do rozpatrzenia tylko przypadek $m = 2$. Z dowodu punktu 2 wiemy

już, że wówczas $n \leq \frac{3}{10}g$, co nie wyklucza sytuacji $n \geq \frac{g}{4}$. Zauważmy jednak, że

$$g = 2n + \left(n - \frac{n}{n_1}\right) + \left(n - \frac{n}{n_2}\right) = \frac{n}{n_1} \left(4n_1 - 1 - \frac{n_1}{n_2}\right) = \frac{n}{n_1} (4n_1 - 1) - \frac{n}{n_2}.$$

Przyjmując $k_1 = 4n_1 - 1$, $k_2 = \frac{n}{n_1}$ oraz $k = \frac{n}{n_2}$, otrzymujemy dodatnie liczby nieparzyste k_1, k_2, k , gdzie $k \leq \frac{n}{3} < \frac{g}{3}$ oraz

$$g + k = \frac{n}{n_1} (4n_1 - 1) = k_1 k_2,$$

czyli g spełnia założenia punktu 4.

6. Wiemy już, że jeśli g nie spełnia założeń punktów 1 – 4, to $n \leq \frac{g}{4}$ oraz jeśli $n = \frac{g}{4}$, to g spełnia założenia punktu 5. Stąd w punkcie 6 mamy $n < \frac{g}{4}$.

Jeżeli g nie spełnia założeń poprzednich punktów, to g jest parzysta oraz $g \not\equiv 2 \pmod{6}$, ponieważ g postaci $g = 6s + 2 = 2(3s + 1)$ spełnia założenia punktu 1 (gdy s parzyste), 2 lub 3 (gdy s nieparzyste). Jest tak ponieważ każda liczba postaci $6s + 2$ dla nieparzystego s ma jedno z poniższych przedstawień (*odd*, *even* oznaczają pewną liczbę nieparzystą lub parzystą odpowiednio)

- $2^3 \cdot \text{odd}$, gdzie $\text{odd} \equiv 1 \pmod{3}$ i wówczas g spełnia założenia punktu 2,
- $2^2 \cdot \text{odd}$, gdzie $\text{odd} \equiv 2 \pmod{3}$ i wówczas g spełnia założenia punktu 3, ponieważ $2^2 \cdot \text{odd} + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ (gdy odd nie jest pierwsza, równość ta zachodzi też dla pewnego jej dzielnika, co daje wyższy stopień pierwiastka, np. dla $g = 140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$ mamy $3 \mid 141$, ale też $3 \mid 21$),
- $2^3 \cdot \text{even}$, gdzie $\text{even} \equiv 1 \pmod{3}$, i wówczas jeśli $\text{even} = 2^{2l} \cdot \text{odd}$, to $2^3 \cdot \text{even} = 2^{3+2l} \cdot \text{odd}$ spełnia założenia punktu 2, natomiast jeśli $\text{even} = 2^{2l+1} \cdot \text{odd}$, to $\text{odd} \equiv 2 \pmod{3}$, więc $2^{2(l+2)} \cdot \text{odd} + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, czyli $2^3 \cdot \text{even} = 2^{2(l+2)} \cdot \text{odd}$ spełnia założenia punktu 3.

Jeżeli $g = 6s - 2 = 2(3s - 1)$, to s musi być nieparzysta, bo w innym wypadku g spełniałoby założenia punktu 2. Otrzymujemy w ten sposób liczby postaci

- $2^2 \cdot \text{odd}$, gdzie $\text{odd} \equiv 1 \pmod{3}$, czyli g nie spełnia założeń punktu 3, ale spełnia założenia punktu 5,
- $2^3 \cdot \text{odd}$, gdzie $\text{odd} \equiv 2 \pmod{3}$, czyli g spełnia założenia punktu 2,
- $2^3 \cdot \text{even}$, gdzie $\text{even} \equiv 2 \pmod{3}$, wówczas jeśli $\text{even} = 2^{2l} \cdot \text{odd}$, to $g = 2^3 \cdot \text{even} = 2^{3+2l} \cdot \text{odd}$ spełnia założenia punktu 2, a gdy $\text{even} = 2^{2l+1} \cdot \text{odd}$, to $\text{odd} \equiv 1 \pmod{3}$, więc $2^3 \cdot \text{even} = 2^{2(l+2)} \cdot \text{odd}$ nie spełnia założeń żadnego z punktów 1 – 5.

Dla $g = 6s - 2$ i nieparzystego s istnieje sygnatura typu A z $n = s = \frac{g+2}{6}$, $g_0 = 4$, $m = 2$, $n_1 = n_2 = n$ oraz $(a, b, c_1, c_2) = (2, 2, 1, 1)$.

Ostatecznie jeżeli $g = 6s$, to s musi być parzysta, bo w innym wypadku g spełnia założenia punktu 2. Dla parzystych s otrzymujemy liczby g postaci

- $2^2 \cdot odd$, gdzie $odd = 0 \pmod 3$, które spełniają albo założenia punktu 3 (gdy odd ma dzielnik przystający do 2 modulo 3), albo założenia punktu 5,
- $2^3 \cdot odd$, gdzie $odd = 0 \pmod 3$, które spełniają założenia punktu 2,
- $2^3 \cdot even$, gdzie $even = 0 \pmod 3$ i wówczas jeśli $even = 2^{2l} \cdot odd$, to $2^3 \cdot even = 2^{3+2l} \cdot odd$ spełnia założenia punktu 2, a gdy $even = 2^{2l+1} \cdot odd$, to $g = 2^3 \cdot even = 2^{2(l+2)} \cdot odd$ dla $odd = 0 \pmod 3$ nie spełnia założeń punktów 1 – 5.

Stąd liczby postaci $g = 6s$ niespełniające założeń punktów 1 – 5 można przedstawić jako $g = 2^{2l} \cdot 3k$ dla pewnej nieparzystej liczby k oraz $l \geq 2$. Dla takiego g istnieje sygnatura typu A z $n = \frac{(2^{2l} \cdot 3 + 6)k}{6} = \frac{g+6k}{6}$, $g_0 = 4$, $m = 2$, $n_1 = n_2 = \frac{n}{3k}$ oraz $(a, b, c_1, c_2) = (2, 2, 1, 1)$.

□

Uwaga 4.2.2. Może się wydawać, że oszacowanie $N > \frac{g}{6}$ jest dość grube, jednak korzystając z komputera można sprawdzić, że istnieją takie g , dla których faktycznie $N < \frac{g}{4}$. Na przykład $g = 16 = 2^3 \cdot 2^3 = 6 \cdot 3 - 2$ nie spełnia założeń punktów 1 – 5 i pierwiastkiem maksymalnego stopnia w $\mathcal{M}(N_{18})$ ze skręcenia Dehna typu A jest pierwiastek stopnia $3 = \frac{g+2}{6}$ o sygnaturze

$$(A, 3, 4, (2, 2); (1, 3), (1, 3)),$$

który opisaliśmy w dowodzie punktu 6.

Dla niektórych liczb tej postaci istnieje jednak pierwiastek wyższego stopnia. Przykładem jest $g = 256 = 2^3 \cdot 2^5 = 6 \cdot 43 - 2$, dla którego maksymalny stopień pierwiastka ze skręcenia Dehna typu A wynosi $45 = \frac{g+2 \cdot 7}{6} > \frac{g+2}{6} = 43$ (mimo tego i tak zachodzi $45 < \frac{g}{4}$) i pierwiastek ten ma sygnaturę

$$(A, 45, 4, (2, 2); (1, 9), (1, 5)).$$

Twierdzenie 4.2.3. [57] *Niech c będzie dwustronnym okręgiem nierozdzielającym na powierzchni nieorientowalnej $N_{2g'+2}$ rodzaju $2g' + 2$, gdzie $g' \geq 2$, takim że $N_{2g'+2} \setminus c$ jest orientowalna. Oznaczmy przez N maksymalny stopień pierwiastka ze skręcenia Dehna t_c w $\mathcal{M}(N_{2g'+2})$.*

1. Jeżeli $g' = 3k$ dla pewnej nieparzystej liczby $k > 1$, to $N = 3g'$.
2. Jeżeli $g' = 2k$ dla pewnej nieparzystej liczby $k > 1$, to $N = \frac{5}{2}g'$.
3. Jeżeli $g' = 2^2 \cdot 3k$ dla pewnej nieparzystej liczby $k \geq 1$, to $N = \frac{9}{4}g'$.
4. Jeżeli $g' = 5k$ dla pewnej nieparzystej liczby $k > 1$ oraz g nie spełnia założeń punktu 1, to $N = \frac{11}{5}g'$.
5. Jeżeli $g' = 2^3 \cdot k$ dla pewnej nieparzystej liczby $k > 1$, to $N = \frac{17}{8}g'$.
6. Jeżeli $g' = 11k$ dla pewnej nieparzystej liczby $k > 1$, a ponadto g' nie spełnia założeń punktów 1 i 4, to $N = \frac{23}{11}g'$.
7. Jeżeli $g' = 2^4 \cdot 3k$ dla pewnej nieparzystej liczby $k \geq 1$, to $N = \frac{33}{16}g'$.

8. Jeżeli $g' = 17k$ dla pewnej nieparzystej liczby $k > 1$ oraz g' nie spełnia założeń punktów 1, 4 ani 6, to $N = \frac{35}{17}g'$.
9. Jeżeli $g' = \frac{3s+1}{2} \cdot k$ dla pewnych liczb nieparzystych s, k , gdzie $k > 1$, a ponadto g' nie spełnia założeń punktów 1 – 8, to $2g' < \frac{2(3s+2)}{3s+1}g' \leq N \leq \frac{41}{20}g'$.
10. Jeżeli $g' = \frac{3s-1}{2} \cdot 3k$ dla pewnych liczb nieparzystych s, k , a ponadto g' nie spełnia założeń punktów 1 – 8, to $2g' < \frac{6s}{3s-1}g' \leq N \leq \frac{41}{20}g'$.
11. Jeżeli g' nie spełnia założeń punktów 1 – 10 oraz $g' \not\equiv 1 \pmod{3}$, to $2g' + 1 \leq N \leq \frac{41}{20}g'$. Jeżeli dodatkowo g' jest liczbą pierwszą, to $N = 2g' + 1$.
12. Jeżeli g' nie spełnia założeń punktów 1 – 10 oraz $g' \equiv 1 \pmod{6}$, to $g' \leq N \leq \frac{41}{20}g'$. Jeżeli dodatkowo g' jest liczbą pierwszą, to $N \leq \frac{5}{4}g'$.
13. Jeżeli g' nie spełnia założeń punktów 1 – 12, to $g' \equiv 4 \pmod{12}$ oraz $g' + 1 \leq N \leq \frac{41}{20}g'$.

Dowód. Rodzaj sygnatury typu B spełnia

$$2g' = n \left(2g_0 + \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n_j} \right) \right) = 2ng_0 + \sum_{j=1}^m \left(n - \frac{n}{n_j} \right), \quad (4.3)$$

więc gdy $g_0 \geq 1$, to $n \leq g'$. Ponieważ szukamy pierwiastków maksymalnego stopnia, będziemy zakładali, że $g_0 = 0$. Podobnie, dla $m \geq 3$ otrzymujemy $g' \geq \frac{3}{2} \left(n - \frac{n}{3} \right) = n$, więc będziemy zakładać, że $m = 1$ lub $m = 2$ (g_0 i m nie mogą być jednocześnie równe zero, bo wówczas $g' = 0 < 2$ i w $\mathcal{M}(N_{2g'+2})$ nie ma pierwiastków – Twierdzenie 4.1.4).

Gdy $m = 2$ otrzymujemy

$$g' \geq \left(n - \frac{n}{3} \right) = \frac{2}{3}n, \quad (4.4)$$

czyli $n \leq \frac{3}{2}g'$. Niech więc $m = 1$. Wtedy

$$g' = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{n_1} \right) = \frac{n(n_1 - 1)}{2n_1} = d \cdot \frac{n_1 - 1}{2}, \quad (4.5)$$

gdzie $d = \frac{n}{n_1}$. W szczególności $n = \frac{2n_1}{n_1 - 1} \cdot g'$, więc dla ustalonego g' otrzymujemy tym większe wartości n , im mniejsza jest wartość n_1 . Załóżmy najpierw, że $d > 1$. Z warunków (D3B) i (D4B) uzyskujemy

$$\begin{cases} a + b + dc_1 = 0 \pmod{dn_1} \\ b - a = ab \pmod{dn_1} \end{cases} \implies \begin{cases} a + b = 0 \pmod{d} \\ b - a = ab \pmod{d} \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \pmod{d} \\ b = -2 \pmod{d}. \end{cases}$$

Oznaczmy $a = a_1d + 2$, $b = b_1d - 2$ dla pewnych $a_1, b_1 \in \{0, 1, \dots, n_1 - 1\}$. Warunki (D3B) i (D4B)

przyjmują postać

$$\begin{cases} 0 = a + b + c_1 d = (a_1 + b_1 + c_1) d \pmod{dn_1} \\ 0 = ab - b + a = (a_1 b_1 d + b_1 - a_1) d \pmod{dn_1} \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = a_1 + b_1 + c_1 \pmod{n_1} \\ 0 = a_1 b_1 d + b_1 - a_1 \pmod{n_1}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Liczba n_1 , jako dzielnik liczby nieparzystej n (Fakt 2.5.5), jest oczywiście nieparzysta. Na początek rozważmy różne wartości n_1 mniejsze od 40.

Jeżeli $n_1 = 3$, to równanie (4.5) implikuje, że $g' = d$ jest liczbą nieparzystą, a pierwsze równanie układu (4.6), że $a_1 = b_1 \neq 0 \pmod{3}$ (ponieważ z (D2) wiemy, że $c_1 \neq 0 \pmod{3}$). Podstawiając to do drugiego równania układu (4.6), otrzymujemy $a_1^2 d = 0 \pmod{3}$, zatem $d = 0 \pmod{3}$, co oznacza, że $g' = 3k$ dla pewnej nieparzystej liczby k . To znaczy sygnatury z $g_0 = 0$, $m = 1$ i $n_1 = 3$ istnieją tylko gdy g' jest nieparzystą wielokrotnością trójki. Z drugiej strony, jeśli $g' = 3k$ dla liczby nieparzystej k , wówczas $a_1 = b_1 = c_1 = 2$ jest rozwiązaniem układu (4.6), otrzymujemy więc następującą sygnaturę typu B

$$(T, n, g_0, (a, b); (c_j, n_j)_{j=1}^m) = (B, 3g', 0, (2, 2); (2, 3)),$$

co kończy dowód punktu 1.

Jeżeli $n_1 = 5$, to równanie (4.5) implikuje, że $g' = 2d = 2k$ dla nieparzystej liczby k . Żeby zakończyć dowód punktu 2, zauważmy, że gdy $g' = 2k$ dla pewnej nieparzystej liczby k , to

$$(a_1, b_1, c_1) = \begin{cases} (1, 1, 3) & \text{dla } d = 0 \pmod{5}, \\ (2, 4, -1) & \text{dla } d = 1 \pmod{5}, \\ (1, 2, 2) & \text{dla } d = 2 \pmod{5}, \\ (2, 1, 2) & \text{dla } d = 3 \pmod{5}, \\ (4, 2, -1) & \text{dla } d = 4 \pmod{5}, \end{cases}$$

jest rozwiązaniem układu (4.6), które daje sygnaturę typu B z $n = \frac{5}{2}g'$.

Jeżeli $n_1 = 7$, to równanie (4.5) implikuje, że $g' = 3d$, czyli g' spełnia założenia punktu 1.

Jeżeli $n_1 = 9$, to równanie (4.5) implikuje, że $g' = 2^2 d$. Podobnie jak w dowodzie punktu 1, redukując układ (4.6) modulo 3, można udowodnić, że jego rozwiązanie istnieje tylko, gdy $d = 0 \pmod{3}$, czyli $g' = 2^2 \cdot 3k$ dla pewnej nieparzystej liczby k . Z drugiej strony, gdy $d = 0 \pmod{3}$, to

$$(a_1, b_1, c_1) = \begin{cases} (1, 1, -2) & \text{dla } d = 0 \pmod{9}, \\ (1, -2, 1) & \text{dla } d = 3 \pmod{9}, \\ (-2, 1, 1) & \text{dla } d = 6 \pmod{9}, \end{cases}$$

jest rozwiązaniem (4.6), co kończy dowód punktu 3.

Dla $n_1 = 11$, $n_1 = 17$, $n_1 = 23$, lub $n_1 = 35$, z równania (4.5) wynika, że dla pewnej nieparzystej liczby k zachodzi $g' = 5k$, $g' = 2^3 k$, $g' = 11k$ lub $g' = 17k$ odpowiednio. W każdym z

tych przypadków możliwe jest znalezienie rozwiązania dla układu (4.6) dającego sygnaturę typu B stopnia $n = \frac{11}{5}g'$, $n = \frac{17}{8}g'$, $n = \frac{23}{11}g'$ lub $n = \frac{35}{17}g'$ odpowiednio. Rozwiązania te można jawnie wyliczyć, jednak widać już pewną prawidłowość, dlatego przedstawimy ogólny algorytm służący do wyliczenia a, b, c_1 spełniających warunki (D1), (D2), (D3B) i (D4B) dla dowolnego n_1 niepodzielnego przez 3.

Niech n_1 będzie liczbą nieparzystą, niepodzielną przez 3. Równanie (4.5) implikuje, że $g' = \frac{n_1-1}{2} \cdot \frac{n}{n_1} = \frac{n_1-1}{2} \cdot k$ dla pewnej nieparzystej liczby k . Pokażemy, że istnieje sygnatura typu B z $n = \frac{2n_1}{n_1-1} \cdot g' = n_1 \cdot k$, $g_0 = 0$ i $m = 1$. Liczby te spełniają równanie (4.3) oraz warunek (D1), wystarczy więc wykazać, że można dobrać a, b, c_1 w taki sposób, aby spełniały one warunki (D2), (D3B) i (D4B).

Oznaczmy $d = \frac{n}{n_1} = k > 1$ (wcześniejsze założenie). Niech $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ będzie zbiorem wszystkich liczb pierwszych, które dzielą zarówno k jak i n_1 , natomiast $\{q_1, q_2, \dots, q_r\}$ zbiorem tych liczb pierwszych, które dzielą n_1 , ale nie dzielą k . Niech $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_s$ oraz $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_r$. Jeżeli którykolwiek ze zbiorów $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$, $\{q_1, q_2, \dots, q_r\}$ jest pusty, przyjmujemy $p = 1$ lub $q = 1$ odpowiednio. Liczby p, q są oczywiście względnie pierwsze oraz $\text{nwd}(k, q) = 1$, zatem w \mathbb{Z}_q istnieje element odwrotny k^{-1} . Z Chińskiego Twierdzenia o Resztach wiadomo, że istnieje rozwiązanie a_1 następującego układu kongruencji (jeżeli $p = 1$ lub $q = 1$, to rozwiązujemy tylko jedno równanie)

$$\begin{cases} a_1 = 1 \pmod{p} \\ a_1 = -3k^{-1} \pmod{q}. \end{cases}$$

Ponieważ 3 nie dzieli n_1 , to liczba a_1 spełnia wówczas $\text{nwd}(a_1, p) = \text{nwd}(a_1, q) = \text{nwd}(a_1, n_1) = 1$. Mnożąc powyższy układ przez d , otrzymujemy

$$\begin{cases} a_1 d = d = 0 \pmod{p} \\ a_1 d = -3dk^{-1} = -3kk^{-1} = -3 \pmod{q}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Dodając do obu równań 1 lub 2 odpowiednio i korzystając z nieparzystości p, q otrzymujemy wniosek, że $\text{nwd}(a_1 d + 1, n_1) = \text{nwd}(a_1 d + 2, n_1) = 1$, w szczególności możemy odwracać $a_1 d + 1$ w \mathbb{Z}_{n_1} . Niech więc

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1(a_1 d + 1)^{-1} \pmod{n_1}, \\ a &= a_1 d + 2 \pmod{n}, \\ b &= b_1 d - 2 \pmod{n}, \\ c_1 &= -(a_1 + b_1) \pmod{n_1}. \end{aligned}$$

Wtedy

(a) Spełniony jest warunek (D4B) ponieważ

$$a + b + dc_1 = a_1 d + 2 + b_1 d - 2 - d(a_1 + b_1) = 0.$$

(b) Liczby a, b spełniają (D3B), ponieważ $ab - b + a = d(a_1bd + b_1 - a_1) \pmod{dn_1}$ oraz

$$\begin{aligned} a_1b_1d + b_1 - a_1 &= a_1 \cdot a_1(a_1d + 1)^{-1} \cdot d + a_1(a_1d + 1)^{-1} - a_1 \\ &= a_1 (a_1(a_1d + 1)^{-1}d + (a_1d + 1)^{-1} - 1) \\ &= a_1 ((a_1d + 1)^{-1}(a_1d + 1) - 1) = a_1(1 - 1) = 0 \pmod{n_1}. \end{aligned}$$

(c) Korzystając z nieparzystości d , otrzymujemy $1 = \text{nwd}(a, d) = \text{nwd}(b, d)$. Ponadto z podpunktu (b) wynika

$$(a_1d)(b_1d) + b_1d - a_1d = 0 \pmod{n_1},$$

a więc $(a_1d)(b_1d) + b_1d - a_1d = 0 \pmod{p}$ i $(a_1d)(b_1d) + b_1d - a_1d = 0 \pmod{q}$. Podstawiając za a_1d odpowiednio wartości z (4.7), otrzymujemy

$$\begin{cases} b_1d = 0 \pmod{p} \\ 2b_1d = 3 \pmod{q} \end{cases} \implies \begin{cases} b_1d - 2 = -2 \pmod{p} \\ 2(b_1d - 2) = -1 \pmod{q}. \end{cases}$$

Stąd $\text{nwd}(b, p) = \text{nwd}(b, q) = \text{nwd}(b, n_1) = 1$. Ostatecznie

$$\begin{aligned} \text{nwd}(a, n) = 1, & \quad \text{ponieważ } \text{nwd}(a, d) = \text{nwd}(a, n_1) = 1 \\ \text{nwd}(b, n) = 1, & \quad \text{ponieważ } \text{nwd}(b, d) = \text{nwd}(b, n_1) = 1, \end{aligned}$$

zatem liczby a, b spełniają warunek (D2).

(d) Ponieważ $\text{nwd}(a_1, n_1) = \text{nwd}(a_1d + 2, n_1) = 1$, to

$$\begin{aligned} 1 &= \text{nwd}(a_1(a_1d + 2), n_1) = \text{nwd}(a_1(a_1d + 1) + a_1, n_1) = \\ &= \text{nwd}(a_1 + a_1(a_1d + 1)^{-1}, n_1) = \text{nwd}(-c_1, n_1) = \text{nwd}(c_1, n_1), \end{aligned}$$

liczba c_1 spełnia więc warunek (D2).

Dla $n_1 = 33$ z równania (4.5) wynika, że $g' = 16 \cdot d$ dla $d = \frac{n}{n_1}$. Podobnie jak w dowodzie punktu 1, redukując układ (4.6) modulo 3, można pokazać, że $d = 3k$, czyli $g' = 2^4 \cdot 3k$. Ponadto istnieje sygnatura typu B stopnia $n = \frac{33}{16}g'$. Znowu dowiedzimy tego w bardziej ogólny sposób: dla każdej liczby n_1 podzielnej przez 3 równanie (4.5) oraz układ (4.6) implikują, że $g' = \frac{n_1-1}{2} \cdot 3k$. Pokażemy, że dla takiego g' istnieje sygnatura typu B z $n = \frac{2n_1}{n_1-1} \cdot g' = n_1 \cdot 3k$, $g_0 = 0$ i $m = 1$.

Zauważmy, że różnica względem przypadku $3 \nmid n_1$ polega na tym, że 3 może dzielić q , dlatego trzeba zmienić definicję a_1 . Mamy jednak $d = \frac{n}{n_1} = 3k$, więc dla p, q zdefiniowanych odpowiednio jako iloczyn dzielników n_1 , które są dzielnikami k oraz iloczyn dzielników n_1 , które nie dzielą k , wystarczy przyjąć, że a_1 jest rozwiązaniem układu kongruencji

$$\begin{cases} a_1 = 1 \pmod{p} \\ a_1 = -k^{-1} \pmod{q}. \end{cases}$$

Wtedy, podobnie jak wyżej, $\text{nwd}(a_1, p) = \text{nwd}(a_1, q) = \text{nwd}(a_1, n_1) = 1$, a mnożąc układ przez d otrzymujemy

$$\begin{cases} a_1 d = d = 0 \pmod{p} \\ a_1 d = -dk^{-1} = -3kk^{-1} = -3 \pmod{q}, \end{cases}$$

więc reszta dowodu może zostać bez zmian.

Podsumowując, pokazaliśmy, że

- jeżeli n_1 nie jest podzielna przez 3, to dla $g' = \frac{n_1-1}{2} \cdot k$, gdzie $k > 1$ jest nieparzysta, istnieje sygnatura typu B z $n = \frac{2n_1}{n_1-1} \cdot g' = n_1 \cdot k$, $g_0 = 0$ i $m = 1$,
- jeżeli n_1 jest podzielna przez 3, to dla $g' = \frac{n_1-1}{2} \cdot 3k$, gdzie $k \geq 1$ jest nieparzysta, istnieje sygnatura typu B z $n = \frac{2n_1}{n_1-1} \cdot g' = n_1 \cdot 3k$, $g_0 = 0$ i $m = 1$.

Sygnatura ta jednak nie zawsze ma maksymalny stopień, ponieważ może się zdarzyć taka sytuacja jak w przypadku $n_1 = 7$, to znaczy równanie (4.5) może implikować, że g' spełnia założenia wcześniejszych punktów (istnieje sygnatura typu B rodzaju g' z mniejszą wartością n_1). Gdy rozważamy $n_1 < 40$ jest tak dla $n_1 \in \{7, 13, 15, 19, 21, 25, 27, 29, 31, 37, 39\}$, (w przypadku $n_1 \in \{15, 21, 27, 39\}$ redukujemy układ (4.6) modulo 3, by pokazać, że $g' = 0 \pmod{3}$). Zauważmy, że w szczególności jest tak zawsze, gdy $n_1 = 1 \pmod{3}$, ponieważ dla $n_1 = 3s + 1$, gdzie s jest liczbą parzystą, otrzymujemy $g' = \frac{3s}{2} \cdot k = \frac{s}{2} \cdot 3k$, $k > 1$, więc istnieje sygnatura typu B rodzaju g' z $n_1 = s + 1$, dla której $n = \frac{2(s+1)}{s} g' > \frac{2(3s+1)}{3s} g'$.

Łatwo wywnioskować, że jeżeli g' nie spełnia założeń punktów 1 – 8, to

$$n \leq \frac{2g'}{1 - \frac{1}{41}} = \frac{41}{20} g'. \quad (4.8)$$

Kończy to dowód punktów 4 – 10.

Załóżmy teraz, że $m = 1$ oraz $d = \frac{n}{n_1} = 1$. Równanie (4.5) implikuje wówczas $n = 2g' + 1$. Gdyby $a = b \pmod{n}$, to z warunku (D3B) otrzymalibyśmy $ab = 0 \pmod{n}$, co daje sprzeczność z (D2). Stąd $a \neq b \pmod{n}$. W szczególności, jeśli $3|n$, to $a + b = 0 \pmod{3}$, co prowadzi jednak do sprzeczności z koniunkcją warunków (D2) i (D4B). Nie istnieje więc pierwiastek stopnia $n = 2g' + 1$, gdy $g' = 1 \pmod{3}$ (tak naprawdę pokazaliśmy już wcześniej, że gdy $3|n_1$, to $d \geq 3$). Natomiast dla $g' \neq 1 \pmod{3}$ istnieje następująca sygnatura typu B stopnia $2g' + 1$

$$(T, n, g_0, (a, b); (c_j, n_j)_{j=1}^m) = (B, 2g' + 1, 0, (3, g' - 1); (g' - 1, 2g' + 1)).$$

Ponadto zauważmy, że jeżeli g' jest liczbą pierwszą, to równanie (4.5) implikuje, że $d = 1$, zatem w takim przypadku $2g' + 1$ jest maksymalnym stopniem pierwiastka ze skręcenia Dehna t_c . Razem z (4.4) oraz (4.8) kończy to dowód punktu 11.

Od tej pory zakładamy, że g' nie spełnia założeń punktów 1 – 11 i rozważamy przypadek $m = 2$ i $g' = 1 \pmod{3}$.

Jeżeli $(n_1, n_2) = (3, 3)$, to $3|n$ i równanie (4.4) implikuje, że $g' = \frac{2}{3}n$ spełnia założenia punktu 2. Podobnie, gdy $(n_1, n_2) = (3, 5)$, to $g' = \frac{11}{15}n$ spełnia założenia punktu 1 (gdy $9|n$), 4 (gdy $25|n$ i $9 \nmid n$) lub 6 (gdy $9 \nmid n$ i $25 \nmid n$). Dla $(n_1, n_2) = (3, 7)$ otrzymujemy, że $g' = \frac{16}{21}n = 16k$ dla pewnej liczby nieparzystej $k = \frac{n}{21}$. Warunek (D3B) implikuje

$$b - a = ab \pmod{3}.$$

Ponieważ z (D2) $ab \neq 0 \pmod{3}$, to $a \neq b \pmod{3}$, a stąd $a + b = 0 \pmod{3}$. Z (D4B) otrzymujemy

$$a + b + \frac{n}{3} \cdot c_1 + \frac{n}{7} \cdot c_2 = 0 \pmod{3}.$$

więc $c_1 \cdot \frac{n}{3} = 0 \pmod{3}$, co dowodzi, że $9|n$, czyli $k = \frac{n}{21} = 0 \pmod{3}$. Liczba g' spełnia zatem założenia punktu 7. Stąd wniosek, że jeżeli g' nie spełnia założeń punktów 1 – 11 i $m = 2$, to $(n_1, n_2) \notin \{(3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$ oraz

$$2g' \geq \left(n - \frac{n}{5}\right) + \left(n - \frac{n}{5}\right) = \frac{8}{5}n,$$

co dowodzi, że $n \leq \frac{5}{4}g'$ dla wszystkich sygnatur z $m = 2$. W szczególności $N \leq \frac{5}{4}g'$, gdy g' jest liczbą pierwszą przystającą do 1 modulo 3, ponieważ dla takich g' nie ma sygnatur z $m = 1$.

Jeżeli g' jest nieparzysta, to istnieje następująca sygnatura typu B stopnia g'

$$(T, n, g_0, (a, b); (c_j, n_j)_{j=1}^m) = (B, g', 1, (2, -2);),$$

co dowodzi punktu 12.

Ostatecznie jeśli g' nie spełnia założeń punktów 1 – 12, to $g' = 1 \pmod{3}$ i $g' = 0 \pmod{4}$, czyli $g' = 4 \pmod{12}$. W tym przypadku istnieje sygnatura stopnia $g' + 1$ dana przez

$$(T, n, g_0, (a, b); (c_j, n_j)_{j=1}^m) = (B, g' + 1, 0, (2, -2); (1, g' + 1), (-1, g' + 1)).$$

Kończy to dowód punktu 13. □

Rozdział 5

Pierwiastki proste

5.1 Warunki na istnienie pierwiastka prostego stopnia n

Definicja 5.1.1. Pierwiastek ze skręcenia Dehna względem okręgu nierozdzielającego nazywamy *prostym* (ang. *primary*), jeżeli dla wszystkich $j = 1, \dots, m$ zachodzi $n_j = n$, to znaczy wszystkie punkty rozgałęzienia n -krotnego nakrycia rozgałęzionego $N_g \rightarrow N_{g_0}$ są krotności n . Sygnaturę kodującą działanie pierwiastka prostego nazywamy *sygnaturą prostą*.

W szczególności jeżeli n jest liczbą pierwszą, to wszystkie pierwiastki stopnia n ze skręceń Dehna względem okręgów nierozdzielających są proste.

Podrozdział ten zostanie poświęcony pierwiastkom prostym. Najpierw udowodnimy w sposób algebraiczny twierdzenie o ich istnieniu, a następnie skonstruujemy po jednym przykładzie dla wszystkich możliwych $g_0, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wyjaśnimy ponadto na przykładach, w jaki sposób danej konstrukcji można przyporządkować sygnaturę.

Niech n będzie dodatnią liczbą nieparzystą. Dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oznaczmy przez $A_k(n)$ następujący podzbiór liczb naturalnych

$$\begin{aligned} A_k(n) &= \{x \in \mathbb{N} \mid kn + 1 \leq x \leq (k+1)n - (k+1)\} \\ &= \{kn + 1, kn + 2, \dots, (k+1)n - (k+1)\}. \end{aligned}$$

Dla $k \leq (n-2)$ zbiór $A_k(n)$ ma $n - (k+1)$ elementów, a dla $k > (n-2)$ jest pusty.

Twierdzenie 5.1.2. [57] *Niech c będzie dwustronnym nierozdzielającym okręgiem na powierzchni nieorientowalnej N_{g+2} rodzaju $g+2$ takim, że $N_{g+2} \setminus c$ jest nieorientowalna i niech $n \geq 3$ będzie dodatnią liczbą nieparzystą. Pierwiastek prosty stopnia n z t_c istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$g \notin \{0\} \cup \bigcup_{k=0}^{n-2} A_k(n).$$

W szczególności pierwiastki proste istnieją, gdy $g > (n-1)^2$ oraz nie istnieją gdy $g = (n-1)^2$ lub

$g < n$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że dla każdego $g_0 \geq 1$ i $m \geq 0$ istnieje sygnatura prosta typu A z

$$\begin{cases} (a, b; c_1, c_2, \dots, c_{m-1}, c_m) = (2, -2; -4, 4, \dots, -4, 4) & \text{jeżeli } m \text{ jest parzyste,} \\ (a, b; c_1, c_2, \dots, c_{m-1}, c_m) = (2, 2; -4, 4, \dots, 4, -4) & \text{jeżeli } m \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Stąd istnienie pierwiastka prostego z t_c zależy wyłącznie od g i n , a liczby a, b, c_i można zawsze odpowiednio dobrać. Geometryczna konstrukcja pierwiastków odpowiadających tym sygnaturom dla $n = 3$ została opisana w Przykładzie 5.2.2, a jej ogólnienie dla dowolnego n wyjaśnione w Uwadze 5.2.3. Korzystając z operacji zachowujących klasy równoważności sygnatur typu A łatwo pokazać, że niezależnie od parzystości m sygnatury te można przekształcić do postaci, w której $(a, b; c_1, c_2, \dots, c_{m-1}, c_m) = (2, 2; 4, 4, \dots, 4)$. Wybór znaków powyżej nie jest jednak przypadkowy i został opisany w Uwadze 5.2.1.

Rodzaj g sygnatury prostej typu A dany jest wzorem

$$g = g_0 n + m(n - 1). \quad (5.1)$$

Jeżeli dla danego g i n istnieje rozwiązanie $(g_0, m) \in \mathbb{Z}^2$ równania (5.1) takie, że $g_0 \geq 1, m \geq 0$, to na N_{g+2} istnieje pierwiastek prosty stopnia n ze skręcenia Dehna t_c . Ustalmy $n \geq 3$. W poniższej tabeli znajdują się kolejne wartości g odpowiadające $g_0 \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ i $m \in \{0, 1, \dots, n-2\}$.

$g_0 \backslash m$	0	1	2	...	$n-3$	$n-2$
1	n	$2n-1$	$3n-2$...	$(n-2)n - (n-3)$	$\frac{(n-1)n - (n-2)}{n \cdot n - (n-2)}$
2	$2n$	$3n-1$	$4n-2$...	$\frac{(n-1)n - (n-3)}{n \cdot n - (n-3)}$	$\frac{(n-1)n - (n-2)}{n \cdot n - (n-2)}$
3	$3n$	$4n-1$	$5n-2$...	$\frac{n \cdot n - (n-3)}{n \cdot n - (n-3)}$	$(n+1)n - (n-2)$
...
$n-3$	$(n-3)n$	$(n-2)n-1$	$\frac{(n-1)n-2}{n \cdot n - 2}$...	$(2n-6)n - (n-3)$	$(2n-5)n - (n-2)$
$n-2$	$(n-2)n$	$\frac{(n-1)n-1}{n \cdot n - 1}$	$n \cdot n - 2$...	$(2n-5)n - (n-3)$	$(2n-4)n - (n-2)$
$n-1$	$\frac{(n-1)n}{n \cdot n - 1}$	$n \cdot n - 1$	$(n+1)n - 2$...	$(2n-4)n - (n-3)$	$(2n-3)n - (n-2)$

Z tabeli natychmiastowo wynika, że nie istnieją sygnatury proste z $g < n$. Ponadto, porządkując rosnąco możliwe wartości g , otrzymujemy

$$\begin{aligned} (0) & \quad [n] \rightarrow \\ (1) & \quad [2n-1] \rightarrow [2n] \rightarrow \\ (2) & \quad [3n-2] \rightarrow [3n-1] \rightarrow [3n] \rightarrow \\ & \quad \vdots \\ (k-1) & \quad [k \cdot n - (k-1)] \rightarrow [kn - (k-2)] \rightarrow \dots \rightarrow [kn] \rightarrow \\ (k) & \quad [(k+1)n - k] \rightarrow [(k+1)n - (k-1)] \rightarrow \dots \rightarrow [(k+1)n] \rightarrow \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Przy przejściu z wiersza $(k-1)$ do (k) nie osiągamy $n - (k+1)$ wartości pośrednich między kn a $(k+1)n - k$ ($k \geq 0$, przyjmujemy, że w wierszu (-1) znajduje się wyłącznie 0). Zauważmy, że są to dokładnie liczby należące do zbioru $A_k(n)$. Oznacza to, że dla $k \geq (n-1)$ w tabeli występują wszystkie rodzaje $kn - (k-1)$, $kn - (k-2)$, \dots , kn , $kn+1$, $kn+2$, \dots . W szczególności ostatnim nieosiągalnym rodzajem g jest $g = (n-1)n - (n-1) = (n-1)^2$, a dla każdego $g > (n-1)^2$ istnieje sygnatura prosta rodzaju g . \square

Niech n będzie dodatnią liczbą nieparzystą oraz $n_0 = \frac{n-1}{2}$. Dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oznaczmy przez $B_{2k+1}(n)$ i $B_{2k+2}(n)$ następujące podzbiory liczb naturalnych

$$\begin{aligned} B_{2k+1}(n) &= \{x \in \mathbb{N} \mid 2kn_0 + k + 1 \leq x \leq (2k+1)n_0 - 1\} \\ &= \{2kn_0 + k + 1, 2kn_0 + k + 2, \dots, (2k+1)n_0 - 1\} \\ &= \{nk + 1, nk + 2, \dots, (2k+1)n_0 - 1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{2k+2}(n) &= \{x \in \mathbb{N} \mid (2k+1)n_0 + k + 1 \leq x \leq (2k+2)n_0 - 1\} \\ &= \{(2k+1)n_0 + k + 1, (2k+1)n_0 + k + 2, \dots, (2k+2)n_0 - 1\} \\ &= \{nk + n_0 + 1, nk + n_0 + 2, \dots, (2k+1)n_0 - 1\}. \end{aligned}$$

Dla $k \leq (n_0 - 2)$ oba zbiory $B_{2k+1}(n)$ i $B_{2k+2}(n)$ mają po $n_0 - (k+1)$ elementów, a dla $k > (n_0 - 2)$ są puste.

Twierdzenie 5.1.3. [57] *Niech c będzie dwustronnym okręgiem nierozdzielającym na powierzchni nieorientowanej $N_{2g'+2}$ rodzaju $2g' + 2$ takim, że $N_{2g'+2} \setminus c$ jest orientowalna i niech n będzie dodatnią liczbą nieparzystą. Oznaczmy $n_0 = \frac{n-1}{2}$.*

1. *Przypuśćmy, że $n \not\equiv 0 \pmod{3}$. Pierwiastek prosty stopnia n ze skręcenia Dehna t_c istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $g' \notin \{0\} \cup \bigcup_{j=1}^{n-3} B_j(n)$.*

W szczególności pierwiastek prosty stopnia n z t_c istnieje, gdy $g' \geq \frac{(n-3)(n-1)}{2}$ oraz nie istnieje, gdy $g' = \frac{(n-3)(n-1)}{2} - 1$ lub $g' < \frac{n-1}{2}$.

2. *Przypuśćmy, że $n \equiv 0 \pmod{3}$. Pierwiastek prosty stopnia n ze skręcenia Dehna t_c istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $g' \notin \{0\} \cup \bigcup_{j=1}^{n-3} B_j(n) \cup \bigcup_{k=0}^{n_0-1} \{kn + n_0\}$.*

W szczególności pierwiastek prosty stopnia n z t_c istnieje, gdy $g' \geq \frac{(n-3)(n-1)}{2} \neq 0$ oraz $g' \neq \frac{n^2-2n-1}{2}$, natomiast nie istnieje, gdy $g' = \frac{(n-3)(n-1)}{2} - 1$, $g' = \frac{n^2-2n-1}{2}$ lub $g' < n-1$.

Dowód. Dla dowolnych $g_0 \geq 0$ i $m \geq 2$ można skonstruować pierwiastek stopnia n opisany przez

$$(a, b; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \dots, c_{m-1}, c_m) = \begin{cases} (2, -2; -4, 4, -4, 4, -4, \dots, -4, 4), & m \text{ parzyste} \\ (2, -2; -2, -2, 4, -4, 4, \dots, -4, 4), & m \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

Jeżeli $g_0 \geq 1$, to istnieje również pierwiastek z $m = 0$ oraz $(a, b) = (2, -2)$ (g_0 i m nie mogą być jednocześnie równe zero — w grupie klas odwzorowań butelki Kleina nie ma pierwiastków, ponieważ jest to grupa izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ [43]). Konstrukcja tych pierwiastków została opisana w Przykładzie 5.2.8 dla $n = 3$, a jej uogólnienie dla dowolnego n wyjaśnione w Uwadze 5.2.9.

Gdy $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, można skonstruować pierwiastek z $m = 1$ i $(a, b; c_1) = (\frac{n+3}{2}, -3; \frac{n+3}{2})$, którego konstrukcja została opisana w Przykładzie 5.2.11, natomiast gdy $n \equiv 0 \pmod{3}$, to warunek (D3B) implikuje $a \not\equiv b \pmod{3}$, a więc $a + b \equiv 0 \pmod{3}$, co oznacza, że nie istnieje rozwiązanie równania (D4B) z $m = 1$, ponieważ z warunku (D2) zachodzi $\text{nwd}(c_1, n) = 1$.

Rodzaj g' sygnatury prostej typu B dany jest wzorem:

$$g' = g_0 n + m \frac{n-1}{2} \quad (5.2)$$

Jeżeli dla danych g, n istnieje rozwiązanie $(g_0, m) \in \mathbb{Z}^2$ równania (5.2) spełniające $g_0, m \geq 0$ oraz można dobrać a, b, c_1, \dots, c_m tak, aby spełnione były warunki (D1), (D2), (D3B), (D4B), to na $N_{2g'+2}$ istnieje pierwiastek prosty stopnia n ze skręcenia Dehna t_c . Ustalmy $n \geq 3$ i oznaczmy $n_0 = \frac{n-1}{2}$. W poniższej tabeli znajdują się kolejne wartości g' odpowiadające $g_0 \in \{0, 1, 2, \dots, n_0 - 1\}$ i $m \in \{0, 1, 2, \dots, n-3\}$.

$g_0 \backslash m$	0	1	2	3	...	$n-3$
0	0	n_0	$n-1$	$n+n_0-1$...	$(n_0-1)n - (n_0-1)$
1	n	$n+n_0$	$2n-1$	$2n+n_0-1$...	$n_0 \cdot n - (n_0-1)$
2	$2n$	$2n+n_0$	$3n-1$	$3n+n_0-1$...	$(n_0+1)n - (n_0-1)$
...
n_0-3	$(n_0-3)n$	$(n_0-3)n+n_0$	$(n_0-2)n-1$	$(n_0-2)n+n_0-1$...	$(n-5)n - (n_0-1)$
n_0-2	$(n_0-2)n$	$n_0 \cdot n - (n_0-1)$	$(n_0-1)n-1$	$(n_0-1)n+n_0-1$...	$(n-4)n - (n_0-1)$
n_0-1	$(n_0-1)n$	$(n_0-1)n+n_0$	$n_0 \cdot n - 1$	$n_0 \cdot n + n_0 - 1$...	$(n-3)n - (n_0-1)$

Oczywiste jest, że w przypadku $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, jeśli $g' < n_0$, to nie istnieją pierwiastki stopnia n z t_c , a w przypadku $n \equiv 0 \pmod{3}$ pierwiastki takie nie istnieją, gdy $g' < n-1$.

Porządkując rosnąco możliwe wartości g' , otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (0) & \quad [0] \rightarrow \\
 (1) & \quad [n_0] \rightarrow \\
 (2) & \quad [n-1] \rightarrow [n] \rightarrow \\
 (3) & \quad [n+n_0-1] \rightarrow [n+n_0] \rightarrow \\
 (4) & \quad [2n-2] \rightarrow [2n-1] \rightarrow [2n] \rightarrow \\
 (5) & \quad [2n+n_0-2] \rightarrow [2n+n_0-1] \rightarrow [2n+n_0] \rightarrow \\
 (6) & \quad [3n-3] \rightarrow [3n-2] \rightarrow [3n-1] \rightarrow [3n] \rightarrow \\
 & \quad \vdots \\
 (2k) & \quad [kn-k] \rightarrow [kn-(k-1)] \rightarrow \dots \rightarrow [kn] \rightarrow
 \end{aligned}$$

$$(2k+1) \quad [kn+n_0-k] \rightarrow [kn+n_0-(k-1)] \rightarrow \dots \rightarrow [kn+n_0] \rightarrow$$

$$\vdots$$

Przy przejściu z wiersza $(2k)$ do $(2k+1)$ nie osiągamy $n_0 - (k+1)$ wartości pośrednich, które są liczbami ze zbioru $B_{2k+1}(n)$, natomiast przy przejściu z wiersza $(2k+1)$ do $(2k+2)$ nie osiągamy $n_0 - (k+1)$ wartości pośrednich będących liczbami ze zbioru $B_{2k+2}(n)$. Wszystkie wartości $kn-k, kn-(k-1), \dots, kn, kn+1, kn+2, \dots$ możemy więc osiągnąć, o ile $k \geq n_0 - 1 = \frac{n-3}{2}$. W szczególności jesteśmy w stanie otrzymać wszystkie wartości $g' \geq \frac{n-3}{2} \cdot n - \frac{n-3}{2} = \frac{(n-1)(n-3)}{2}$. Jeżeli $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, jest to równoważne z istnieniem pierwiastka prostego stopnia n z t_c dla $g' \geq \frac{(n-1)(n-3)}{2}$, a nawet więcej: pierwiastek prosty stopnia n z t_c nie istnieje tylko, gdy

$$g' \in \{0\} \cup \bigcup_{k=0}^{n_0-2} B_{2k+1}(n) \cup \bigcup_{k=0}^{n_0-2} B_{2k+2}(n) = \{0\} \cup \bigcup_{j=1}^{n-3} B_j(n).$$

W przypadku $n \equiv 0 \pmod{3}$ trzeba zwrócić uwagę na potencjalnie nieosiągalne wartości z $m=1$ postaci $kn+n_0$. Zauważmy, że gdy $k \geq n_0$, to

$$kn+n_0 = (n_0+r)n+n_0 = r \cdot n + (n+1)n_0,$$

gdzie $r \geq 0$, czyli rodzaj $g' = kn+n_0$ odpowiadający pierwiastkowi stopnia n z $g_0 = k \geq n_0$ i $m=1$ można zrealizować jako pierwiastek stopnia n z $g_0 = r$ i $m = n+1$. Stąd w przypadku $n \equiv 0 \pmod{3}$ pierwiastek stopnia n z t_c nie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$g' \in \{0\} \cup \bigcup_{k=0}^{n_0-2} B_{2k+1}(n) \cup \bigcup_{k=0}^{n_0-2} B_{2k+2}(n) \cup \bigcup_{k=0}^{n_0-1} \{kn+n_0\} = \{0\} \cup \bigcup_{j=1}^{n-3} B_j(n) \cup \bigcup_{k=0}^{n_0-1} \{kn+n_0\}.$$

W szczególności jedynym rzeczywiście nieosiągalnym rodzajem powyżej $\frac{(n-1)(n-3)}{2}$ jest $g' = (n_0-1)n+n_0 = \frac{n^2-2n-1}{2}$. \square

Skręcenia Dehna względem okręgów nierozdzielających na powierzchni orientowalnej S_{g+1} , $g \geq 1$, zawsze posiadają pierwiastek stopnia 3 [47, 46]. Podobne stwierdzenie jest prawdziwe także w przypadku nieorientowalnym. Oczywiście, wszystkie pierwiastki stopnia 3 są proste, ponieważ 3 jest liczbą pierwszą.

Wniosek 5.1.4. [57] *Niech c będzie okręgiem nierozdzielającym na powierzchni nieorientowalnej N_{g+2} . Jeżeli skręcenie Dehna t_c posiada pierwiastek, to posiada także pierwiastek stopnia 3.*

Dowód. Jeżeli $N_{g+2} \setminus c$ jest nieorientowalna, to Twierdzenie 5.1.2 implikuje, że t_c ma pierwiastek stopnia 3, gdy $g \geq 5$. Ponadto istnieje pierwiastek stopnia 3, gdy $g=3$ z $g_0=1, m=0$ oraz $(a,b) = (2, -2)$. Razem z Twierdzeniem 4.1.4 dowodzi to tezy w przypadku skręceń Dehna typu A.

Jeżeli $N_{g+2} \setminus c$ jest orientowalna, to z Twierdzenia 5.1.3 wynika, że t_c ma pierwiastek stopnia 3, gdy $g' = \frac{g}{2} \neq 0, 1$, czyli dokładnie wtedy, kiedy według Twierdzenia 4.1.4 skręcenie Dehna t_c posiada jakikolwiek pierwiastek. \square

5.2 Konstrukcja geometryczna

Przypominamy notację przyjętą w dowodzie Twierdzenia 4.1.1, ponieważ będziemy się do niej wielokrotnie odwoływać. Listę oznaczeń można również znaleźć na stronie 128. Niech c będzie okręgiem dwustronnym na powierzchni N_{g+2} . Oznaczmy przez c_1, c_2 dwie składowe brzegu powierzchni $N_{g+2} \setminus c$. Zaklejamy je dyskami, otrzymując powierzchnię zamkniętą F , która jest homeomorficzna albo z N_g (Przypadek A), albo z $S_{\frac{g}{2}}$ (Przypadek B). Pierwiastek prosty h stopnia n ze skręcenia Dehna t_c o m punktach stałych na N_{g+2} , $m \geq 0$, indukuje homeomorfizm t rzędu n w $\text{Homeo}(F)$ o $m+2$ punktach stałych. Wyróżnione dwa punkty stałe odwzorowania t pochodzą od środków dysków wklejonych wzdłuż okręgów c_1, c_2 na $N_{g+2} \setminus c$. Oznaczmy punkt stały znajdujący się wewnątrz dysku ograniczanego przez c_1 przez P , a punkt stały znajdujący się wewnątrz dysku ograniczanego przez c_2 przez Q . Pozostałe punkty stałe na F oznaczamy przez X_1, X_2, \dots, X_m . Homeomorfizm t wokół wszystkich punktów stałych lokalnie działa jak obrót.

Przyjmujemy, że homeomorfizm t lokalnie działa jak obrót o kąt

- $\frac{2\pi k}{n}$ wokół punktu P , $\text{nwd}(k, n) = 1$,
- $\frac{2\pi l}{n}$ wokół punktu Q , $\text{nwd}(l, n) = 1$,
- $\frac{2\pi y_j}{n}$ wokół punktów X_j , $j = 1, 2, \dots, m$, $\text{nwd}(y_j, n) = 1$,

oraz definiujemy a, b jako odwrotności k, l w \mathbb{Z}_n odpowiednio oraz c_j jako odwrotność y_j w \mathbb{Z}_{n_j} .

5.2.1 Pierwiastki ze skręceń typu A – przykłady

Uwaga 5.2.1. Przypomnijmy, że dwie sygnatury typu A są *równoważne*, jeżeli różnią się o skończoną liczbę następujących operacji:

- (1) zamianę a z b (tylko gdy obie sygnatury spełniają warunek $a + b = ab \pmod n$),
- (2) zmianę (a, b) na $(-b, -a)$ (tylko gdy obie sygnatury spełniają warunek $b - a = ab \pmod n$),
- (3) zmianę znaku przy b lub którymkolwiek z c_1, c_2, \dots, c_m ,
- (4) zmianę uporządkowania par $(c_1, n_1), \dots, (c_m, n_m)$.

W szczególności mamy równoważność par $(a, b) \sim (a, -b) \sim \begin{cases} (b, -a), & \text{gdy } a + b = ab \pmod n \\ (-b, a), & \text{gdy } b - a = ab \pmod n. \end{cases}$

Mimo tego przyporządkowując danej konstrukcji sygnaturę będziemy niekiedy pisać $(2, -2)$, a niekiedy $(2, 2)$ i przyczyna tego rozróżnienia wymaga wyjaśnienia.

Powodem, dla którego możemy zmieniać lokalne orientacje wokół przeciwobrazów punktów stożkowych dla każdego punktu stożkowego z osobna (co odpowiada zmianom $b \mapsto -b, c_j \mapsto -c_j$) jest fakt, że $F = N_g$ jest nieorientowalna oraz nie jest możliwe ustalenie jednorodnej konwencji służącej do ustalenia „kanonicznego” wyboru tych lokalnych orientacji (tak jak na przykład zrobiliśmy to w Uwadze 2.4.6). Z Lematu 3.2.32 wynika, że w przypadku nieorientowalnym

możemy wybrać generatory $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ tak, aby **prawie wszystkie (oprócz jednego)** generatory hiperboliczne były przekształcane przez reprezentację $\varphi : \pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \rightarrow C_n$ w 1. Przypuśćmy na moment, że zawsze możliwe jest wybranie takiego zbioru generatorów, aby **wszystkie** generatory hiperboliczne były przekształcane w 1 (w rzeczywistości nie zawsze jest to możliwe, co ilustruje Przykład 5.2.7). Otrzymalibyśmy wtedy również w przypadku A równość

$$a + b + \sum_{j=1}^m \frac{n}{n_j} c_j = 0 \pmod{n},$$

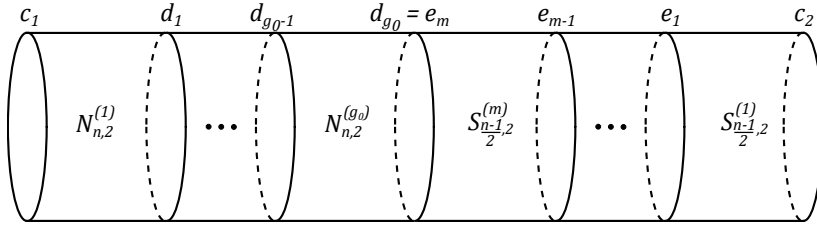
a więc warunek (D4B), który nakładałby duże ograniczenia na istnienie pierwiastków. Co jednak ważniejsze, z Faktu 1.4.7 (a dokładnie jego orbifoldowej wersji, Uwaga 3.2.28) wynikałoby, że $\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{g_0}$ podnosi się do pętli na F , która „odcina” część nieorientowalną. W sposób analogiczny do Uwagi 2.4.6 moglibyśmy więc przyjąć, że lokalna orientacja wokół przeciwbrazów $Q, \{X_j^c\}$ punktów stożkowych q, x_j jest jednoznacznie wyznaczona przez lokalną orientację wokół punktu P , dziedziczoną z otoczenia regularnego U_c okręgu c na N_{g+2} . Orientacji tej nie można byłoby zmieniać osobno dla każdego punktu, ponieważ zaburzałoby to własność $\varphi(\mu_1) = \varphi(\mu_2) = \varphi(\mu_{g_0})$ (a więc nie byłaby już spełniona równość z (D4B)). Stąd oprócz dużych ograniczeń na istnienie pierwiastków, otrzymalibyśmy także znaczne ograniczenia na ich równoważność. W szczególności sygnatury typu A spełniające (D3A) z różnym znakiem nie mogłyby być równoważne. Jeśli obie spełniałyby go ze znakiem „+”, to byłyby równoważne, gdyby różniły się co najwyżej zamianą kolejności par (c_j, n_j) i zamianą a z b , a gdyby obie spełniały go ze znakiem „-”, to ich równoważność byłaby definiowana tak samo jak w przypadku sygnatur typu B. W rzeczywistości jednak warunki równoważności sygnatur typu A są o wiele luźniejsze.

Niemniej zdarza się, że dla danego pierwiastka typu A jest możliwość uzyskania równości $a + b + \sum_{j=1}^m \frac{n}{n_j} c_j = 0 \pmod{n}$, czyli wybrania takiego zbioru generującego orbifold \mathcal{O} , aby **wszystkie** generatory hiperboliczne były przekształcane w 1. Tak się składa, że większość prezentowanych w tej pracy przykładów pierwiastków typu A (poza Przykładem 5.2.7) będzie miała tę własność. Będziemy im przyporządkowywać sygnaturę spełniającą

$$a + b + \sum_{j=1}^m \frac{n}{n_j} c_j = 0 \pmod{n} \text{ oraz } 0 < a \leq \frac{n-1}{2} \pmod{n},$$

przy czym znaki $+/-$ przy konkretnych liczbach w sygnaturze nie będą dobierane losowo (byłoby tylko była spełniona powyższa równość), lecz będą pochodziły z interpretacji lokalnej orientacji zgodnej z Uwagą 2.4.6.

Niech g będzie takie, że $g = ng_0 + (n-1)m$ dla pewnych $g_0 \geq 1, m \geq 0$. Wybierzmy okrąg c , którego dopełnienie $N_{g+2} \setminus c$ jest powierzchnią nieorientowalną $N_{g,2}$. Zauważmy, że możemy wówczas myśleć o $N_{g,2}$ jak o powierzchni składającej się z g_0 powierzchni homeomorficznych z $N_{n,2}$ i m powierzchni homeomorficznych z $S_{\frac{n-1}{2},2}$. Dla $i = 1, \dots, g_0, j = 1, \dots, m$ oznaczmy przez d_i, e_j okręgi rozdzielające $N_{g+2} \setminus c$ na g_0 podpowierzchni $N_{n,2}$ i m podpowierzchni $S_{\frac{n-1}{2},2}$ (numerujemy je za pomocą indeksów górnych $N_{n,2}^{(i)}, S_{\frac{n-1}{2},2}^{(j)}$) i załóżmy, że $d_{g_0} = e_m$, jak



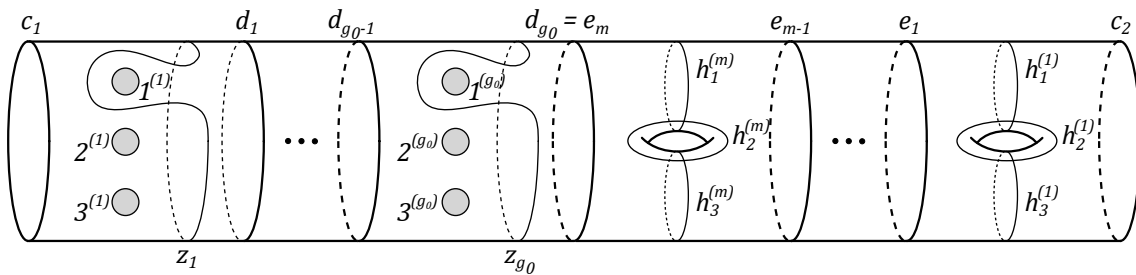
Rysunek 5.1: Rozkład $N_{g+2} \setminus c = N_{g,2}$ na $N_{n,2}^{(i)}$ i $S_{\frac{n-1}{2},2}^{(j)}$, $i = 1, \dots, g_0$, $j = 1, \dots, m$.

przedstawiono na Rysunku 5.1. Niech $u_k^{(i)}$ oznacza transpozycję wstęg Möbiusa zamieniającą miejscami k -tą i $(k+1)$ -wszą wstęgę Möbiusa na powierzchni $N_{n,2}^{(i)}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Ustalmy orientację w otoczeniu regularnym okręgu c_1 , oraz niech orientacja w otoczeniu regularnym okręgu c_2 będzie wyznaczona w sposób zgodny z Uwagą 2.4.6. Dzięki temu możemy odróżnić $(t_{c_1}t_{c_2})^{\pm 1}$ od $(t_{c_1}t_{c_2}^{-1})^{\pm 1}$. $N_{g,2}$ jest nieorientowalna, zatem brzegi c_1, c_2 możemy skleić na dwa możliwe sposoby, aby otrzymać powierzchnię N_{g+2} : z zachowaniem orientacji wokół c_2 (przy modelu takim jak na Rysunku 5.1 możemy o tym myśleć, jak o sklejeniu dwóch składowych brzegu powierzchni bocznej walca tak, aby otrzymać torus) lub ze zmianą orientacji wokół c_2 (tak jak powstaje butelka Kleina z powierzchni bocznej walca). Przy sklejanu z zachowaniem orientacji $t_{c_1}t_{c_2}$ na $N_{g,2}$ indukuje t_c^2 na N_{g+2} , natomiast $t_{c_1}t_{c_2}^{-1}$ identyczność. W przypadku sklejenia ze zmianą orientacji jest odwrotnie.

Zgodnie z konwencją ustaloną w Uwadze 2.4.6 określamy również orientację w otoczeniu regularnym każdego okręgu d_i, e_j , co pozwala nam odróżnić $(t_{d_{i-1}}t_{d_i}^{-1})^{\pm 1}$ od $(t_{d_{i-1}}t_{d_i})^{\pm 1}$ oraz $(t_{e_j}t_{e_{j-1}}^{-1})^{\pm 1}$ od $(t_{e_j}t_{e_{j-1}})^{\pm 1}$.

Monden [47, Sekcja 4] skonstruował pierwiastki stopnia 3 ze skręceń Dehna na powierzchniach orientowalnych, korzystając z relacji gwiazdy (Fakt 2.3.18) i relacji łańcucha (Fakt 2.3.17). Poniższy przykład ilustruje podobną konstrukcję w przypadku nieorientowalnym.



Rysunek 5.2: Model powierzchni $N_{g+2} \setminus c = N_{g,2}$ dla $n = 3$. Zaznaczono okręgi $c_1, c_2, d_i, z_i, e_j, h_1^{(j)}, h_2^{(j)}, h_3^{(j)}$ ($i = 1, \dots, g_0$, $j = 1, \dots, m$).

Przykład 5.2.2. Zgodnie z oznaczeniami na Rysunku 5.2 dla $i = 1, \dots, g_0$, $j = 1, \dots, m$ definiujemy odwzorowania

$$\varrho_i = t_{d_i}^{-1} t_{z_i} u_1^{(i)} u_2^{(i)}$$

$$\tau_j = \left(t_{h_1^{(j)}}\right)^2 t_{h_2^{(j)}} t_{h_3^{(j)}}.$$

Wniosek 3.4.10 implikuje, że odwzorowania ϱ_i , nie mają punktów stałych na $N_{3,2}^{(i)}$, a z Wniosku 3.4.13 wiemy, że τ_j posiada jeden punkt stały X_j na $S_{1,2}^{(j)}$, wokół którego działa jak obrót o $\frac{2\pi}{3}$. Na mocy relacji łańcucha (Fakt 2.3.17) oraz formuły obrotu rzędu g na $N_{g,2}$ (Wniosek 3.4.9) zachodzi

$$\varrho_i^3 = t_{d_{i-1}} t_{d_i}^{-1}$$

$$\tau_j^3 = t_{e_j} t_{e_{j-1}}$$

(identyfikujemy d_0 z c_1 oraz e_0 z c_2).

Przypuśmy najpierw, że $g_0 = 1$, $m = 0$. Wtedy $\varrho_1^3 = t_{c_1} t_{c_2}^{-1}$. Jeżeli skleimy $N_{3,2}$ z zachowaniem orientacji, to ϱ_1^3 indukuje identyczność na N_5 , natomiast jeśli skleimy $N_{3,2}$ ze zmianą orientacji, to $\varrho_1^3 = t_c^2$, zatem $h = \varrho_1^2 t_c^{-1}$ jest pierwiastkiem stopnia 3 z t_c .

Indukowanym przez h homeomorfizmem powierzchni $F = N_3$, powstałej przez zaklejenie dyskami składowych brzegu c_1, c_2 powierzchni $N_{3,2}$, jest odwzorowanie $t = \left(u_1^{(1)} u_2^{(1)}\right)^2$, które jest rzędu 3 w $\mathcal{M}(N_3)$ oraz ma dwa punkty stałe P, Q , wokół których działa jak obrót o kąt $\frac{2\cdot 2\pi}{3}$ i $-\frac{2\cdot 2\pi}{3}$ odpowiednio⁶. Stąd $(k, l) = (2, 1)$, czyli $(a, b) = (2, 1)$. Orbifold $\mathcal{O} = N_3 / \langle \varrho_1^2 \rangle$ jest powierzchnią N_1 z dwoma punktami stożkowymi stopnia 3 i orbifoldową grupą podstawową $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}) = \langle \alpha, \beta, \mu_1 \mid \alpha^3, \beta^3, \alpha\beta\mu_1^2 \rangle$.

Dla $g_0 = 2, m = 0$ na powierzchni $N_{6,2}$ zachodzi $(\varrho_1 \varrho_2)^3 = t_{c_1} t_{d_1}^{-1} t_{d_1} t_{c_2}^{-1} = t_{c_1} t_{c_2}^{-1}$. Sklejamy więc $N_{6,2}$ znowu ze zmianą orientacji i otrzymujemy pierwiastek stopnia 3 z t_c dany wzorem $(\varrho_1 \varrho_2)^2 t_c^{-1}$. Zauważmy, że indukowane przez ten pierwiastek odwzorowanie $\left(u_1^{(1)} u_2^{(1)} u_1^{(2)} u_2^{(2)}\right)^2$ na $F = N_6$ również ma tylko dwa punkty stałe P, Q , wokół których działa jak obrót o kąt $\frac{2\cdot 2\pi}{3}$ i $-\frac{2\cdot 2\pi}{3}$, więc ponownie $(a, b) = (2, 1)$. Orbifold $\mathcal{O} = N_3 / \langle (\varrho_1 \varrho_2)^2 \rangle$ ma rodzaj 2, stąd rzeczywiście konstrukcja ta odpowiada przypadkowi $g_0 = 2, m = 0$. Ogółem, wszystkie pierwiastki stopnia 3 skonstruowane za pomocą takiej procedury, dla których $m = 0$ mają sygnaturę $(A, 3, g_0, (2, 1);)$.

Rozważmy przypadek $m > 0$. Zaczniemy od $g_0 = 1, m = 1$. Ponieważ na powierzchni $N_{5,2}$ zachodzi $(\varrho_1 \tau_1)^3 = t_{c_1} t_{c_2}$, więc tym razem rekonstruujemy N_7 , zachowując orientację, aby indukowane odwzorowanie na N_7 nie było identycznością. Ponieważ $(\varrho_1 \tau_1)^3 = t_c^2$, więc $(\varrho_1 \tau_1)^2 t_c^{-1}$ jest pierwiastkiem stopnia 3 z t_c w $\mathcal{M}(N_7)$.

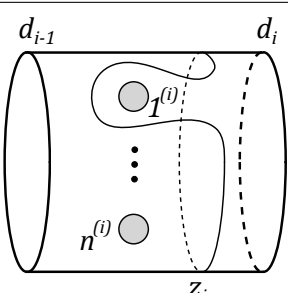
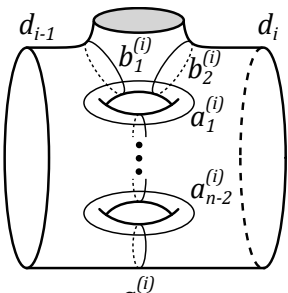
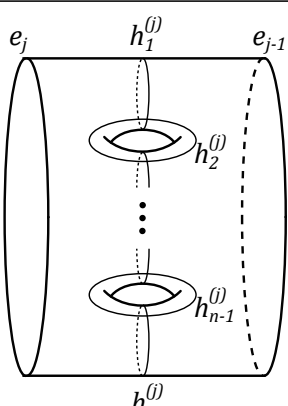
Jeżeli zakleimy dyskami okręgi c_1, c_2 , to orbifold $N_5 / \langle (\varrho_1 \tau_1)^2 \rangle$ ma trzy punkty stożkowe stopnia 3: dwa będące obrazami punktów stałych P, Q , które oznaczamy standardowo przez p, q , oraz jeden dodatkowy, oznaczany przez x_1 , pochodzący od punktu stałego τ_1 na $S_{1,2}^{(1)}$. Kąty obrotu wokół punktów P, Q przy odwzorowaniu $(\varrho_1 \tau_1)^2$ wynoszą $\frac{4\pi}{3}$, więc $(k, l) = (2, 2)$, czyli $(a, b) = (2, 2)$. Z Wniosku 3.4.13 wynika, że kąt obrotu wokół punktu X_1 (przeciwobrazu punktu stożkowego x_1) przy działaniu τ_1 wynosi $\frac{2\pi}{3}$, zatem przy działaniu $(\varrho_1 \tau_1)^2$ będzie to kąt $\frac{4\pi}{3}$, a stąd $c_1 = 2$. Ostatecznie skonstruowany pierwiastek ma sygnaturę $(A, 3, 1, (2, 2); (2, 3))$. Ogólniej, wszystkie pierwiastki stopnia 3 z $m = 1$ skonstruowane za pomocą takiej procedury i mają sygnaturę $(A, 3, g_0, (2, 2); (2, 3))$.

⁶Zakładamy, że orientacja przy Q jest wyznaczona przez orientację przy P – Uwaga 5.2.1

Dla $m \equiv 2$ i dowolnego g_0 pierwiastkiem stopnia 3 z t_c jest $(\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{g_0} \tau_2 \tau_1^{-1})^2 t_c^{-1}$. Powierzchnię $N_{g+2} \setminus c$ skleamy ze zmianą orientacji, ponieważ $(\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{g_0} \tau_2 \tau_1^{-1})^3 = t_{c_1} t_{c_2}^{-1}$, więc pierwiastkowi temu odpowiada sygnatura $(A, 3, g_0, (2, 1); (2, 3), (1, 3))^7$.

Powyższą konstrukcję można łatwo uogólnić, definiując obroty ϱ_i rzędu n na podpowierzchniach $N_{n,2}^{(i)}$ i odwzorowania τ_j wykorzystujące relację łańcucha długości n na podpowierzchniach $S_{\frac{n-1}{2},2}^{(j)}$ zgodnie z Tabelą 5.1. Kąt obrotu wokół jednego punktu stałego odwzorowania τ_j na $S_{\frac{n-1}{2},2}^{(j)}$ wynosi $\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2}$, zgodnie z Wnioskiem 3.4.13.

Tablica 5.1: Podpowierzchnie $N_{g+2} \setminus c = N_{g,2}$. Identyfikujemy d_0 z c_1 , e_0 z c_2 oraz d_{g_0} z e_m .

	Podpowierzchnia	Odwzorowanie
$N_{n,2}^{(i)}$		$\varrho_i = t_{d_i}^{-1} t_{z_i} u_1^{(i)} u_2^{(i)} \cdots u_{n-1}^{(i)}$ $\varrho_i^n = t_{d_{i-1}} t_{d_i}^{-1}$ <p>Liczba punktów stałych: 0</p>
$N_{n,2}^{(i)}$		$\delta_i = t_{b_1^{(i)}} t_{b_2^{(i)}} t_{a_1^{(i)}} t_{a_2^{(i)}} \cdots t_{a_{n-1}^{(i)}}$ $\delta_i^n = t_{d_{i-1}} t_{d_i}^{-1}$ <p>Liczba punktów stałych: 0</p>
$S_{\frac{n-1}{2},2}^{(j)}$		$\tau_j = (t_{h_1^{(j)}})^2 t_{h_2^{(j)}} t_{h_3^{(j)}} \cdots t_{h_n^{(j)}}$ $\tau_j^n = t_{e_j} t_{e_{j-1}}$ <p>Liczba punktów stałych: 1 Kąt obrotu wokół punktu stałego: $\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2}$</p>

⁷Być może wbrew intuicji liczba c_1 odpowiada obrotowi wokół punktu stałego na $S_{1,2}^{(2)}$, a c_2 obrotowi wokół punktu stałego na $S_{1,2}^{(1)}$. Innymi słowy numerujemy punkty stożkowe od lewej do prawej według modelu przedstawionego na Rysunku 5.2, a nie według numeracji podpowierzchni $S_{1,2}^{(j)}$. Tej konwencji będziemy się trzymać do końca pracy.

Uwaga 5.2.3. Uogólniając powyższą konstrukcję dla dowolnego n , otrzymujemy pierwiastki typu A z

$$\begin{cases} (a, b; c_1, c_2, \dots, c_{m-1}, c_m) = (2, -2; -4, 4, \dots, -4, 4) & \text{jeżeli } m \text{ jest parzyste,} \\ (a, b; c_1, c_2, \dots, c_{m-1}, c_m) = (2, 2; -4, 4, \dots, 4, -4) & \text{jeżeli } m \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Założmy, że m jest parzyste. Wtedy

$$\begin{aligned} (\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_1^{-1})^n &= t_{c_1} t_{c_2}^{-1} && \text{na } N_{g,2} \\ (\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_1^{-1})^n &= t_c^2 && \text{na } N_{g+2} \\ \left((\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_1^{-1})^{\frac{n+1}{2}} t_c^{-1} \right)^n &= t_c && \text{na } N_{g+2}. \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika stąd, że jeśli $f^n = t_c^2$ i f komutuje z t_c , to aby wyprowadzić formułę na t_c , wystarczy znaleźć liczby α, β takie, że $\alpha \cdot n + 2 \cdot \beta = 1$, o których wiemy, że istnieją, ponieważ $\text{nwd}(2, n) = 1$. Wówczas $(f^\beta t_c^\alpha)^n = t_c$. Rozwiązaniem jest właśnie $\alpha = -1, \beta = \frac{n+1}{2}$ (oraz oczywiście wszystkie inne liczby postaci $\alpha_k = -1 + 2k, \beta_k = \frac{n+1}{2} - nk$ dla $k \in \mathbb{Z}$ – w szczególności β jest dobrze zdefiniowane modulo n , co dobrze koresponduje z Uwagą 4.1.3).

Odwzorowanie $h = (\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_1^{-1})^{\frac{n+1}{2}} t_c^{-1}$ jest pierwiastkiem stopnia n z t_c na N_{g+2} , które indukuje odwzorowanie

$$t = \left(u_1^{(1)} u_2^{(1)} \cdots u_{n-1}^{(1)} u_1^{(2)} u_2^{(2)} \cdots u_{n-1}^{(2)} \cdots u_1^{(g_0)} u_2^{(g_0)} \cdots u_{n-1}^{(g_0)} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_1^{-1} \right)^{\frac{n+1}{2}}$$

na N_g o $m + 2$ punktach stałych:

- P , wokół którego działa jak obrót o kąt $\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n+1}{2}$, więc $k = \frac{n+1}{2}$ i $a = 2$,
- Q , wokół którego działa jak obrót o kąt $\frac{-2\pi}{n} \cdot \frac{n+1}{2}$, więc $l = \frac{-(n-1)}{2}$ i $b = -2$,
- $\frac{m}{2}$ punktów X_1, X_3, \dots, X_{m-1} , wokół których działa jak obrót o kąt $\frac{(n-1)\pi}{n} \cdot \frac{n+1}{2}$, więc $y_1 = y_3 = \dots = y_{m-1} = \frac{(n-1)(n+1)}{2 \cdot 2} = \frac{n^2-1}{4}$ i $c_1 = c_3 = \dots = c_{m-1} = -4$,
- $\frac{m}{2}$ punktów X_2, X_4, \dots, X_m , wokół których działa jak obrót o kąt $\frac{(1-n)\pi}{n} \cdot \frac{n+1}{2}$, więc $y_2 = y_4 = \dots = y_m = \frac{(1-n)(n+1)}{2 \cdot 2} = \frac{1-n^2}{4}$ i \mathbb{Z}_n są $c_2 = c_4 = \dots = c_m = 4$.

Przypadek, gdy m jest nieparzyste, jest analogiczny.

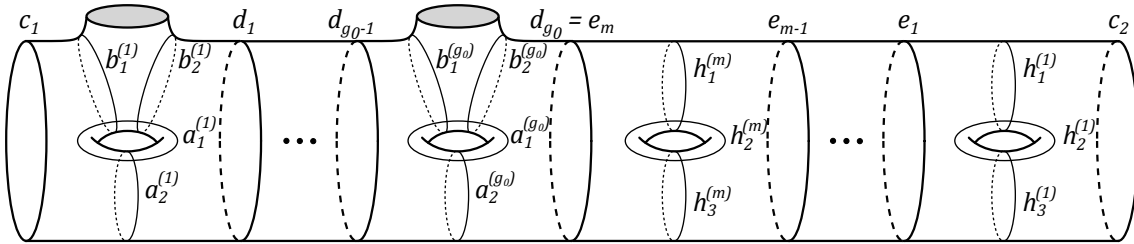
$$\begin{aligned} (\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_1)^n &= t_{c_1} t_{c_2} && \text{na } N_{g,2} \\ (\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_1)^n &= t_c^2 && \text{na } N_{g+2} \\ \left((\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_1)^{\frac{n+1}{2}} t_c^{-1} \right)^n &= t_c && \text{na } N_{g+2}. \end{aligned}$$

Pierwiastek $h = (\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_1)^{\frac{n+1}{2}} t_c^{-1}$ indukuje na N_g odwzorowanie, które posiada $m + 2$ punktów stałych:

- P , wokół którego działa jak obrót o kąt $\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n+1}{2}$, więc $k = \frac{n+1}{2}$ oraz $a = 2$,
- Q , wokół którego działa jak obrót o kąt $\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n+1}{2}$, więc $l = \frac{n+1}{2}$, oraz $b = 2$,
- $\frac{m}{2} + 1$ punktów $X_1, X_3, \dots, X_{m-2}, X_m$, wokół których działa jak obrót o kąt $\frac{(n-1)\pi}{n} \cdot \frac{n+1}{2}$, więc $y_1 = y_3 = \dots = y_{m-2} = y_m = \frac{(n-1)(n+1)}{2 \cdot 2} = \frac{n^2-1}{4}$ oraz $c_1 = c_3 = \dots = c_{m-2} = c_m = -4$,
- $\frac{m}{2}$ punktów X_2, X_4, \dots, X_m , wokół których działa jak obrót o kąt $\frac{(1-n)\pi}{n} \cdot \frac{n+1}{2}$, więc $y_2 = y_4 = \dots = y_{m-1} = \frac{(1-n)(n+1)}{2 \cdot 2} = \frac{1-n^2}{4}$ oraz $c_2 = c_4 = \dots = c_{m-1} = 4$.

Zauważmy, że wszystkie skonstruowane przykłady odpowiadają dokładnie sygnaturom, które zostały podane na początku dowodu Twierdzenia 5.1.2.

Przykład 5.2.4. Niech powierzchnia $N_{3,2}$ będzie reprezentowana jako torus z dwoma dziurami i wklejoną wstęgą Möbiusa. Można wówczas myśleć o niej jak o powierzchni powstałej z powierzchni $S_{1,3}$ przez wklejenie wstęgi Möbiusa wzdłuż jednej składowej brzegu. W szczególności do skonstruowania pierwiastka stopnia 3 ze skręcenia Dehna typu A możliwe jest skorzystanie z relacji gwiazdy (Fakt 2.3.18).



Rysunek 5.3: Model powierzchni $N_{g+2} \setminus c = N_{g,2}$ dla $n = 3$. Zaznaczono okręgi $c_1, c_2, d_i, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, e_j, h_1^{(j)}, h_2^{(j)}, h_3^{(j)}$ ($i = 1, \dots, g_0, j = 1, \dots, m$).

Zgodnie z oznaczeniami na Rysunku 5.3 dla $i = 1, 2, \dots, g_0, j = 1, 2, \dots, m$ definiujemy odwzorowania

$$\delta_i = t_{b_1^{(i)}} t_{b_2^{(i)}} t_{a_1^{(i)}} t_{a_2^{(i)}},$$

$$\tau_j = \left(t_{h_1^{(j)}} \right)^2 t_{h_2^{(j)}} t_{h_3^{(j)}}.$$

Z Wniosku 3.4.11 odwzorowanie δ_i nie ma punktów stałych na $N_{3,2}^{(i)}$, natomiast Wniosek 3.4.13 implikuje, że τ_j posiada jeden punkt stały X_j na $S_{1,2}^{(j)}$, wokół którego działa jak obrót o $\frac{2\pi}{3}$. Ponadto na mocy relacji łańcucha (Fakt 2.3.17) oraz gwiazdy (Fakt 2.3.18) zachodzi

$$\delta_i^3 = t_{d_{i-1}} t_{d_i}^{-1}$$

$$\tau_j^3 = t_{e_j} t_{e_{j-1}}.$$

Stąd pierwiastki, które można skonstruować z odwzorowań postaci

$$\begin{cases} \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_2 \tau_1^{-1} & \text{gdy } m \text{ jest parzyste,} \\ \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_2^{-1} \tau_1 & \text{gdy } m \text{ jest nieparzyste,} \end{cases}$$

są sprzężone z odpowiednimi (dla takich samych g_0 i m) pierwiastkami otrzymanymi z odwzorowań $\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_2 \tau_1^{-1}$ i $\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_2^{-1} \tau_1$ w Przykładzie 5.2.2.

Dokładnie tak samo jest dla dowolnego n – wówczas definiujemy odwzorowania $\varrho_i, \delta_i, \tau_j$ zgodnie z Tabelą 5.1, aby móc skorzystać z relacji trójzębu (Fakt 2.3.19).

Wniosek 5.2.5. *Jeżeli g jest nieparzyste, to klasy odwzorowań*

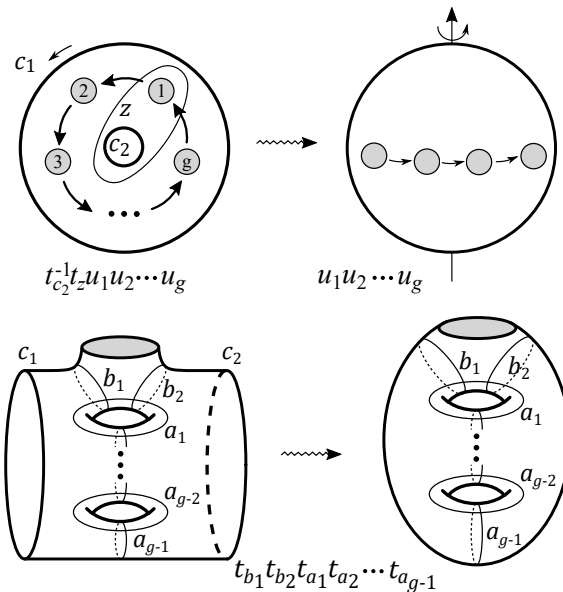
$$\hat{\varrho} = u_1 u_2 \dots u_{g-1} \quad \hat{\delta} = t_{b_1} t_{b_2} t_{a_1} t_{a_2} \dots t_{a_{g-1}},$$

gdzie okręgi $b_1, b_2, a_1, a_2, \dots, a_{g-1}$ są takie, jak na Rysunku 5.4, są sprzężone w grupie $\mathcal{M}(N_g)$.

Dowód. Niech c będzie okręgiem dwustronnym na powierzchni N_{g+2} takim, że $N_{g+2} \setminus c = N_{g,2}$. Oznaczmy dwie składowe brzegu $N_{g+2} \setminus c$ przez c_1, c_2 i korzystając z oznaczeń przedstawionych na Rysunku 5.4, zdefiniujmy odwzorowania

$$\varrho = t_{c_2}^{-1} t_z u_1 u_2 \dots u_{g-1},$$

$$\delta = t_{b_1} t_{b_2} t_{a_1} t_{a_2} \dots t_{a_{g-1}}.$$



Rysunek 5.4: Obrót rzędu g na N_g i odwzorowanie definiujące maksymalną relację trójzębu na N_g są sprzężone.

Wtedy z Wniosku 3.4.9 oraz Faktu 2.3.19 $\varrho^g = t_{c_1} t_{c_2}^{-1} = \delta^g$ (zakładamy, że przy ustalonej orientacji w otoczeniu regularnym okręgu c_1 , w otoczeniu regularnym okręgu c_2 przyjmujemy orientację zgodnie z Uwagą 2.4.6). Jeżeli wzdłuż okręgów c_1, c_2 wkleimy dyski, to otrzymamy powierzchnię N_g

i ϱ indukuje na niej odwzorowanie $\hat{\varrho} = u_1 u_2 \dots u_{g-1}$, a δ odwzorowanie⁸ $\hat{\delta} = t_{b_1} t_{b_2} t_{a_1} t_{a_2} \dots t_{a_{g-1}}$, takie że $\hat{\varrho}^g = 1 = \hat{\delta}^g$.

Jeżeli natomiast sklejmy okręgi c_1, c_2 ze sobą, rekonstruując powierzchnię N_{g+2} , to $h = \varrho^{\frac{g+1}{2}} t_c^{-1}$ oraz $h' = \delta^{\frac{g+1}{2}} t_c^{-1}$ są pierwiastkami stopnia g ze skręcenia Dehna t_c w $\mathcal{M}(N_{g+2})$ o takiej samej sygnaturze $(A, g, 1, (2, -2))$. Indukowane przez nie klasy odwzorowań w $\mathcal{M}(N_g)$ to $t = \hat{\varrho}^{\frac{g+1}{2}}$ i $t' = \hat{\delta}^{\frac{g+1}{2}}$ odpowiednio. Na mocy Twierdzenia 4.1.1 istnieje $f \in \mathcal{M}(N_{g+2})$ taki, że $h' = fhf^{-1}$, będący rozszerzeniem $\hat{f} \in \mathcal{M}(N_g)$ takiego, że $t' = \hat{f}t\hat{f}^{-1}$. Zachodzi więc

$$\begin{aligned}\hat{\delta}^{\frac{g+1}{2}} &= \hat{f}\hat{\varrho}^{\frac{g+1}{2}}\hat{f}^{-1} = \left(\hat{f}\hat{\varrho}\hat{f}^{-1}\right)^{\frac{g+1}{2}} \\ \hat{\delta}^{g+1} &= \left(\hat{f}\hat{\varrho}\hat{f}^{-1}\right)^{g+1} \\ \hat{\delta} &= \hat{f}\hat{\varrho}\hat{f}^{-1}.\end{aligned}$$

□

Uwaga 5.2.6. Z Wniosku 5.2.5 wynika, że gdy g jest nieparzyste, przedstawieniem naturalnego obrotu $u_1 u_2 \dots u_{g-1}$ rzędu g na N_g za pomocą skręceń Dehna jest $t_{b_1} t_{b_2} t_{a_1} t_{a_2} \dots t_{a_{g-1}}$.

Gdy g jest parzyste, nie jest możliwe przedstawienie obrotu rzędu g jako złożenia wyłącznie skręceń Dehna, ponieważ obrót taki, jako złożenie nieparzystej liczby transpozycji wstęp Möbiusa, indukuje automorfizm $H_1(N_g; \mathbb{R})$ o wyznaczniku równym -1 (Uwaga 2.5.5), a skręcenia Dehna indukują automorfizm $H_1(N_g; \mathbb{R})$ o wyznaczniku równym 1 (Uwaga 2.5.6).

Wzory na pierwiastki ze skręceń Dehna typu A dla dowolnego $g_0 \geq 1$ i $m \geq 0$ pochodzące z konstrukcji przedstawionych w Przykładach 5.2.2, 5.2.4 i Uwadze 5.2.3 zostały wymienione w Tabeli 5.3 na końcu rozdziału, razem z odpowiadającymi im sygnaturami.

Przykład 5.2.7. Skonstruujemy teraz pierwiastek stopnia 5, który nie został wymieniony w Tabeli 5.3 z $m = 0$ oraz dla którego nie zachodzi

$$a + b + c_1 \cdot \frac{n}{n_1} + \dots + c_m \cdot \frac{n}{n_m} = a + b = 0 \pmod{n}$$

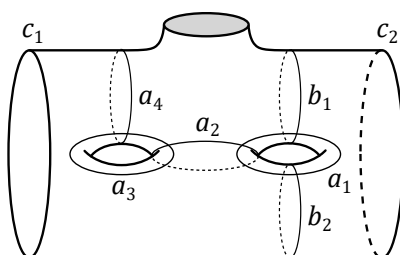
niezależnie od ewentualnej zmiany znaków (patrz: Uwaga 5.2.1).

Tymczasowo wprowadzamy inne oznaczenia na okręgi a_i, b_i (tylko na potrzeby tego przykładu), zgodne z Rysunkiem 5.5.

Na powierzchni $N_{5,2}$ o składowych brzegu c_1, c_2 zdefiniujemy odwzorowanie $\omega = t_{b_1} t_{b_2} t_{a_1} t_{a_2} t_{a_3} t_{a_4}$. Nie ma ono punktów stałych na $N_{5,2}$ (Wniosek 3.4.11) oraz $\omega^5 = t_{c_1} t_{c_2}^{-2}$. Jeżeli wkleimy dyski wzdłuż okręgów c_1, c_2 , to otrzymujemy powierzchnię N_5 , na której ω ma dwa punkty stałe P, Q ⁹. Możemy założyć, że lokalnie wokół P odwzorowanie ω działa jak obrót o kąt $\frac{2\pi}{5}$ (a nie $-\frac{2\pi}{5}$). Przypuścimy, że orientacja wokół Q jest wyznaczona przez orientację wokół P zgodnie z Uwagą 2.4.6. Wtedy ω lokalnie wokół Q działa jak obrót o $-\frac{4\pi}{5}$.

⁸Dla $n = 3$ będzie to $t_{a_2}^2 t_{a_1} t_{a_2} = (t_{a_2} t_{a_1})^2$ – równość wynika z relacji warkoczy, Fakt 2.3.16.

⁹Na tak powstałej powierzchni N_5 okręgi b_1, b_2 są izotopijne, więc ω przyjmuje postać $t_b^2 t_{a_1} t_{a_2} t_{a_3} t_{a_4}$, gdzie $b = b_1 = b_2$.

Rysunek 5.5: Okręgi a_i, b_i na powierzchni $N_{5,2}$.

Aby zrekonstruować powierzchnię N_7 , sklejamy ze sobą okręgi c_1, c_2 na $N_{5,2}$. Jeżeli dokonamy tego, zmieniając orientację w otoczeniu c_2 , to ω indukuje t_c^3 na N_7 , natomiast jeśli sklejimy je z zachowaniem orientacji, to ω indukuje t_c^{-1} na N_7 .

W pierwszym przypadku otrzymujemy $(\omega^2 t_c^{-1})^5 = t_c$. Pierwiastek $\omega^2 t_c^{-1}$ stopnia 5 ze skręcenia Dehna t_c na N_7 indukuje na N_5 odwzorowanie ω^2 , które wokół P działa jak obrót o $\frac{4\pi}{5}$, a wokół Q jak obrót o $\frac{-8\pi}{5}$. Stąd $k = 2, l = -4$, czyli $a = 3$ i $b = 1$. Skonstruowanemu pierwiastkowi odpowiada sygnatura $(A, 5, 1, (3, 1);)$.

W drugim przypadku pierwiastkiem z t_c jest ω^{-1} , które na N_5 obraca wokół P o $-\frac{2\pi}{5}$, a wokół Q o $\frac{4\pi}{5}$, stąd $k = -1, l = 2$, więc $a = 4$ oraz $b = 3$. Skonstruowany pierwiastek jest ma sygnaturę $(A, 5, 1, (4, 3);)$.

Zauważmy jednak, że w obu przypadkach $a + b \neq 0 \pmod{5}$, nie można więc założyć, że orientacja wokół Q jest jednoznacznie wyznaczona przez orientację wokół P (szczegóły opisane w Uwadze 5.2.1). Otrzymane pierwiastki są sprzężone, ponieważ ich sygnatury różnią się o skończoną liczbę operacji zachowujących klasy równoważności sygnatur typu A, opisanych na stronie 82. Dokładnie

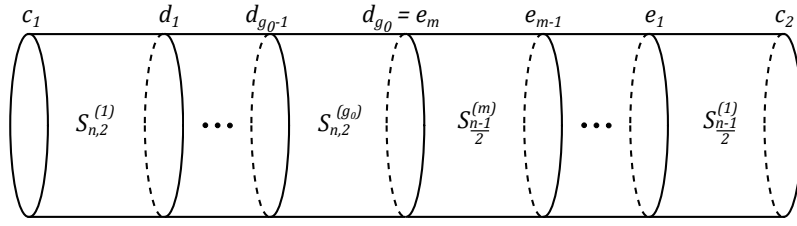
$$(3, 1) \stackrel{(3)}{\sim} (3, -1) = (3, 4) \stackrel{(1)}{\sim} (4, 3).$$

5.2.2 Pierwiastki ze skręceń typu B – przykłady

Niech g będzie takie, że $g = 2ng_0 + (n-1)m$ dla pewnych $g_0 \geq 0, m \geq 0$. Wybierzmy okrąg c , którego dopełnienie $N_{g+2} \setminus c$ jest powierzchnią orientowalną $S_{g',2}$ rodzaju $g' = \frac{g}{2}$. Możemy myśleć o $S_{g',2}$ jak o powierzchni składającej się z g_0 powierzchni homeomorficznych z $S_{n,2}$ i m powierzchni homeomorficznych z $S_{\frac{n-1}{2},2}$. Dla $i = 1, \dots, g_0, j = 1, \dots, m$ oznaczmy przez d_i, e_j okręgi rozdzielające $N_{g+2} \setminus c$ na g_0 podpowierzchni $S_{n,2}$ i m podpowierzchni $S_{\frac{n-1}{2},2}$ (numerujemy je za pomocą indeksów górnych $S_{n,2}^{(i)}, S_{\frac{n-1}{2},2}^{(j)}$) i załóżmy, że $d_{g_0} = e_m$, jak przedstawiono na Rysunku 5.6.

$S_{g',2}$ jest orientowalna, zatem aby zrekonstruować z niej powierzchnię N_{g+2} , brzegi c_1, c_2 musimy skleić ze zmianą orientacji (tak jak powstaje butelka Kleina z powierzchni bocznej walca). Innymi słowy, elementem indukującym t_c^2 na N_{g+2} , jest wyłącznie $(t_{c_1} t_{c_2}^{-1})^{\pm 1}$.

Przykład 5.2.8. Zgodnie z oznaczeniami na Rysunku 5.7 dla $i = 1, 2, \dots, g_0, j = 1, 2, \dots, m$

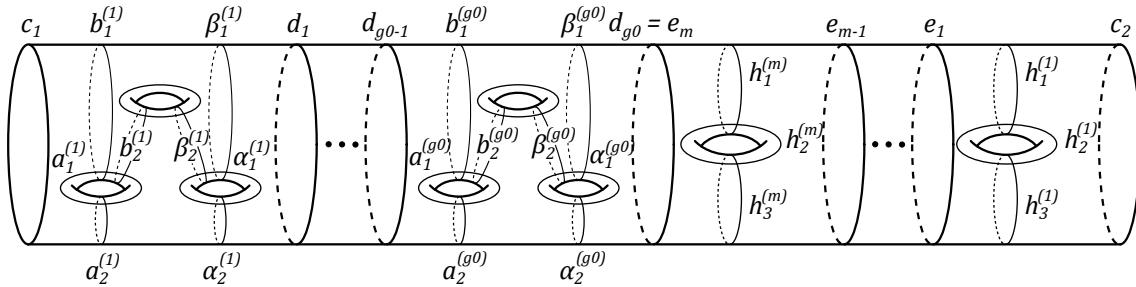


Rysunek 5.6: Rozkład $N_{g+2} \setminus c = S_{g',2}$ na $S_{n,2}^{(i)}$ i $S_{\frac{n-1}{2},2}^{(j)}$, $i = 1, \dots, g_0$, $j = 1, \dots, m$.

definiujemy odwzorowania na $S_{3,2}^{(i)}$ i $S_{1,2}^{(j)}$ odpowiednio

$$\begin{aligned}\delta_i &= t_{b_1^{(i)}} t_{b_2^{(i)}} t_{a_1^{(i)}} t_{a_2^{(i)}} \\ \delta'_i &= t_{\beta_1^{(i)}} t_{\beta_2^{(i)}} t_{\alpha_1^{(i)}} t_{\alpha_2^{(i)}} \\ \eta_i &= \delta_i (\delta'_i)^{-1} \\ \tau_j &= \left(t_{h_1^{(j)}} \right)^2 t_{h_2^{(j)}} t_{h_3^{(j)}}.\end{aligned}$$

Wówczas dla każdego i, j zachodzi



Rysunek 5.7: Model powierzchni $N_{g+2} \setminus c = S_{g',2}$ dla $n = 3$. Zaznaczono okręgi $c_1, c_2, d_i, e_j, a_1^{(i)}, \alpha_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, b_1^{(i)}, \beta_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \beta_2^{(i)}, h_1^{(j)}, h_2^{(j)}, h_3^{(j)}$.

$$\begin{aligned}\eta_i^3 &= t_{d_{i-1}} t_{d_i}^{-1}, \\ \tau_j^3 &= t_{e_j} t_{e_{j-1}},\end{aligned}$$

gdzie $d_0 = c_1$ i $e_0 = c_2$. Na mocy Wniosku 3.4.11 odwzorowanie η_i nie ma punktów stałych na $S_{3,2}^{(i)}$, natomiast τ_j ma jeden punkt stały na $S_{1,2}^{(j)}$ (Wniosek 3.4.6).

Jeżeli m jest parzyste, to jasne jest, że możemy skonstruować pierwiastki stopnia 3 typu B w sposób analogiczny do konstrukcji pierwiastków stopnia 3 typu A dla m parzystego w Przykładach 5.2.2 i 5.2.4, zastępując jedynie ϱ_i lub δ_i przez η_i , ponieważ dla parzystego m rekonstruowaliśmy N_{g+2} z $N_{g+2} \setminus c$ ze zmianą orientacji. W ten sposób otrzymujemy pierwiastki postaci

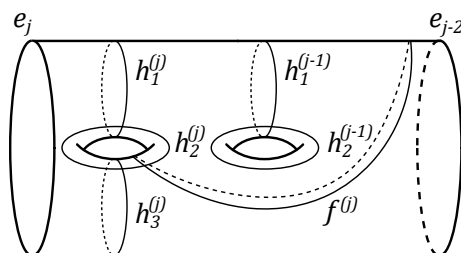
$$\left(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_2 \tau_1^{-1} \right)^2 t_c^{-1}$$

o sygnaturze

$$(B, 3, g_0, (2, 1); (2, n), (1, n), (2, n), \dots, (2, n), (1, n)).$$

Gdy m jest nieparzyste, odwzorowania typu $\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_2 \tau_1$ na $S_{g', 2}$ indukują identyczność na N_{g+2} zamiast nietrywialnej potęgi t_c , stąd nie mogą posłużyć do konstrukcji pierwiastka z t_c .

Dla $n = 3$ nie istnieje pierwiastek prosty typu B z $m = 1$ (jest to wyjaśnione w dowodzie Twierdzenia 5.1.3). Niech więc $m \geq 3$ będzie liczbą nieparzystą. Definiujemy pomocnicze odwzorowanie θ_j na $S_{1,2}^{(j)} \cup S_{1,2}^{(j-1)}$, $j = 1, 2, \dots, m$



Rysunek 5.8: Odwzorowanie θ_j . Zaznaczono okręgi $e_j, e_{j-2}, h_1^{(j)}, h_2^{(j)}, h_3^{(j)}, h_1^{(j-1)}, h_2^{(j-1)}$ oraz $f^{(j)}$.

$$\theta_j = t_{h_1^{(j)}} t_{f^{(j)}} t_{h_2^{(j)}} t_{h_3^{(j)}} \left(t_{h_1^{(j-1)}} t_{h_2^{(j-1)}} \right)^{-2}.$$

Dla każdego j odwzorowanie θ_j ma dwa punkty stałe na $S_{1,2}^{(j)} \cup S_{1,2}^{(j-1)}$, ponieważ $t_{h_1^{(j)}} t_{f^{(j)}} t_{h_2^{(j)}} t_{h_3^{(j)}}$ nie ma punktów stałych na $S_{1,2}^{(j)}$ (Wniosek 3.4.11) oraz $\left(t_{h_1^{(j-1)}} t_{h_2^{(j-1)}} \right)^{-2}$ ma dwa punkty stałe na $S_{1,2}^{(j-1)}$, wokół których działa jak obrót o $-\frac{4\pi}{3}$ (Wniosek 3.4.14). Ponadto $\theta_j^3 = t_{e_j} t_{e_{j-2}}$, a stąd

$$\left(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \theta_m \tau_{m-2}^{-1} \tau_{m-3} \tau_{m-4}^{-1} \cdots \tau_2 \tau_1^{-1} \right)^3 = t_{c_1} t_{c_2}^{-1},$$

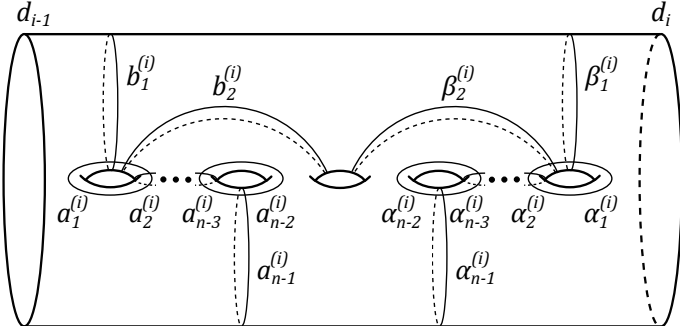
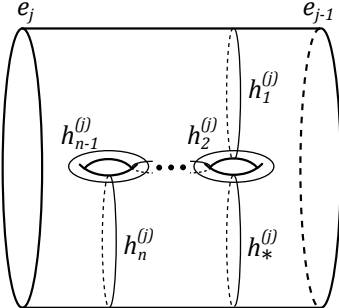
więc $\left(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \theta_m \tau_{m-2}^{-1} \tau_{m-3} \tau_{m-4}^{-1} \cdots \tau_2 \tau_1^{-1} \right)^2 t_c^{-1}$ jest pierwiastkiem stopnia 3 z t_c o sygnaturze $(B, 3, g_0, (2, 1); (1, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 3), (1, 3), \dots, (2, 3), (1, 3))$.

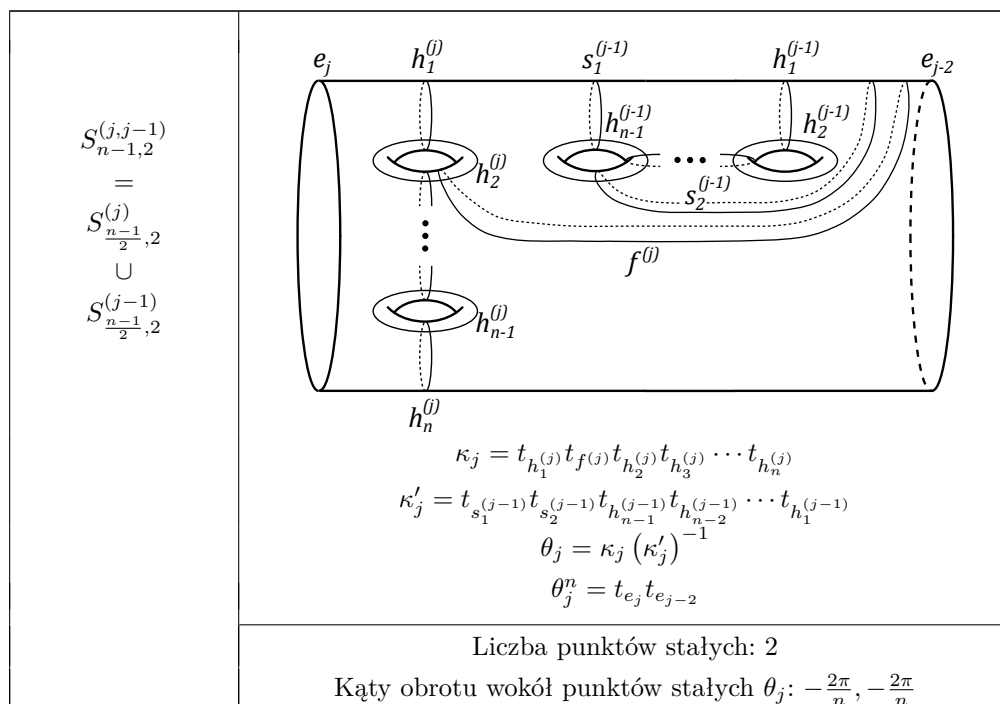
Uwaga 5.2.9. Podobnie jak w przypadku pierwiastków typu A, konstrukcję przedstawioną w Przykładzie 5.2.8 można łatwo uogólnić na przypadek pierwiastków dowolnego stopnia n , wykorzystując relację trójzębu (Fakt 2.3.19). Potrzebne odwzorowania zostały zdefiniowane w Tabeli 5.2. Kąty obrotu wokół ich punktów stałych wynikają z Wniosków 3.4.13 oraz 3.4.12. Otrzymujemy w ten sposób pierwiastki o sygnaturze

$$\begin{cases} (B, n, g_0, (2, -2); (-4, n), (4, n), (-4, n), \dots, (-4, n), (4, n)), & \text{gdy } m \text{ jest parzyste,} \\ (B, n, g_0, (2, -2); (-2, n), (-2, n), (4, n), (-4, n), \dots, (-4, n), (4, n)), & \text{gdy } m \geq 3 \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Wzory na te pierwiastki można znaleźć w Tabeli 5.4.

Tablica 5.2: Podpowierzchnie $N_{g+2} \setminus c = S_{g',2}$. Identyfikujemy d_0 z c_1 , e_0 z c_2 oraz d_{g_0} z e_m .

Podpowierzchnia	Odwzorowanie i jego n -ta potęga
$S_{n,2}^{(i)}$	 <p style="text-align: center;"> $\delta_i = t_{b_1^{(i)}} t_{b_2^{(i)}} t_{\alpha_1^{(i)}} t_{\alpha_2^{(i)}} \cdots t_{\alpha_{n-1}^{(i)}} ; \quad \delta'_i = t_{\beta_1^{(i)}} t_{\beta_2^{(i)}} t_{\alpha_1^{(i)}} t_{\alpha_2^{(i)}} \cdots t_{\alpha_{n-1}^{(i)}}$ $\eta_i = \delta_i (\delta'_i)^{-1}$ $\eta_i^n = t_{d_{i-1}} t_{d_i}^{-1}$ </p> <p style="text-align: center;">Liczba punktów stałych: 0</p>
$S_{\frac{n-1}{2},2}^{(j)}$	 <p style="text-align: center;"> $\tau_j = \left(t_{h_1^{(j)}}\right)^2 t_{h_2^{(j)}} t_{h_3^{(j)}} \cdots t_{h_n^{(j)}} ; \quad \tau_j^n = t_{e_j} t_{e_{j-1}}$ $\zeta_j = t_{h_1^{(j)}} t_{h_*^{(j)}} t_{h_2^{(j)}} t_{h_3^{(j)}} \cdots t_{h_n^{(j)}} ; \quad \zeta_j^n = t_{e_j} t_{e_{j-1}}^{\frac{n-1}{2}}$ </p> <p style="text-align: center;">Liczba punktów stałych: 1</p> <p style="text-align: center;"> Kąt obrotu wokół punktu stałego τ_j: $\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2}$ Kąt obrotu wokół punktu stałego ζ_j: $\frac{2\pi}{n}$ </p>



Uwaga 5.2.10. Gdy $n = 3$, okręgi $s_1^{(j-1)}$ oraz $h_1^{(j-1)}$ są izotopijne, dlatego odwzorowanie θ_j definiujemy tak jak w Przykładzie 5.2.8.

Przykład 5.2.11. Gdy $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, możliwe jest skonstruowanie pierwiastka typu B z $m = 1$. Przedstawimy konstrukcję w przypadku $n = 5$. Niech η_i i ζ_1 będą odwzorowaniami zdefiniowanymi tak, jak w Tabeli 5.2. Dla dowolnego g_0 zachodzi

$$(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \zeta_1)^5 = t_{c_1} t_{c_2}^2 \text{ na } S_{g',2},$$

gdzie $g' = ng_0 + \frac{n-1}{2} = \frac{g}{2}$.

Sklejając c_1, c_2 ze zmianą orientacji, otrzymujemy $(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \zeta_1)^5 = t_c^{-1}$ na N_{g+2} , więc $(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \zeta_1)^{-1} = (\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \zeta_1)^4 t_c$ jest pierwiastkiem stopnia 5 z t_c .

Pierwiastek ten indukuje na $S_{g'}$ odwzorowanie $(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \zeta_1)^4$ o trzech punktach stałych: P , wokół którego działa jak obrót o $\frac{2 \cdot 4\pi}{5}$, Q , wokół którego działa jak obrót o $\frac{4 \cdot 4\pi}{5}$ oraz X_1 , wokół którego działa jak obrót o $\frac{2 \cdot 4\pi}{5}$, stąd $(a, b, c_1) = (4, 2, 4)$.

Ogólnie, dla nieparzystych stopni n postaci $n = 3s + 2$ (s jest nieparzysta) dla dowolnego g_0 zachodzi

$$(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \zeta_1)^{3s+2} = t_{c_1} t_{c_2}^{\frac{3s+1}{2}} \text{ na } S_{g',2},$$

gdzie $g' = ng_0 + \frac{n-1}{2} = \frac{g}{2}$.

Sklejając c_1, c_2 ze zmianą orientacji, otrzymujemy $(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \zeta_1)^{3s+2} = t_c^{\frac{1-3s}{2}}$, więc pierwiastkiem na N_{g+2} jest $(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \zeta_1)^{2s+2} t_c^s$. Ostatnie zdanie wynika stąd, że rozwiązaniem

równania $\alpha \cdot n + \beta \cdot \frac{1-3s}{2} = 1$ jest $\alpha = s, \beta = n - s = 2s + 2$ (oraz wszystkie liczby postaci $\alpha_k = s + \frac{1-3s}{2} \cdot k, \beta_k = n - s - nk$ dla $k \in \mathbb{Z}$).

Dla nieparzystych stopni n postaci $n = 3s + 1$ (s jest parzysta) jest podobnie. Mamy $(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \zeta_1)^{3s+1} = t_c^{\frac{2-3s}{2}}$ oraz rozwiązaniem równania $\alpha \cdot (3s + 1) + \beta \cdot \frac{2-3s}{2} = 1$ jest $\alpha = \frac{s}{2}, \beta = s + 1 = n - 2s$ (oraz wszystkie liczby postaci $\alpha_k = \frac{s}{2} + \frac{2-3s}{2} \cdot k, \beta_k = n - 2s - nk$ dla $k \in \mathbb{Z}$), więc otrzymujemy pierwiastek stopnia n postaci $(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \zeta_1)^{s+1} t_c^{\frac{s}{2}}$.

Uwaga 5.2.12. Wiemy, że nie istnieją pierwiastki typu B z $m = 1$, gdy $n = 0 \pmod{3}$. Zauważmy, że istotnie konstrukcji przedstawionej w Przykładzie 5.2.11 nie można rozszerzyć na przypadek stopni podzielnych przez 3, ponieważ otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \zeta_1)^n &= t_{c_1} t_{c_2}^{\frac{n-1}{2}} && \text{na } S_{g',2} \\ (\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \zeta_1)^n &= t_c^{\frac{3-n}{2}} && \text{na } N_{g+2} \end{aligned}$$

A równanie $\alpha \cdot n + \beta \cdot \frac{3-n}{2} = 1$ nie ma rozwiązań, gdy n jest podzielne przez 3, bo wówczas $\text{nwd}(n, \frac{3-n}{2}) = \text{nwd}(3, \frac{3-n}{2}) = 3$.

Wzory pierwiastków skonstruowanych w Przykładach 5.2.8 i 5.2.11 zostały wymienione w Tabeli 5.4.

5.2.3 Tabele wzorów na pierwiastki

Przedstawimy po jednym przykładzie pierwiastka każdego typu dla wszystkich możliwych wartości $g_0, m \in \mathbb{N}$ oraz przyporządkujemy mu sygnaturę. W przypadku A podajemy sygnatury o własności

$$a + b + \sum_{j=1}^m \frac{n}{n_j} c_j = 0 \pmod{n} \text{ oraz } 0 < a \leq \frac{n-1}{2} \pmod{n},$$

zgodnie z Uwagą 5.2.1. Za pomocą operacji zachowujących klasy równoważności sygnatury typu A możemy je przekształcić w sygnatury postaci $(A, n, g_0, (2, 2); (4, n), (4, n), \dots, (4, n), (4, n))$.

W przypadku pierwiastków ze skręceń Dehna typu B nie zawsze można skonstruować pierwiastek z $(a, b) = (2, -2)$. Dla $m = 1$ pierwiastki typu B istnieją wyłącznie dla $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ i wówczas $(a, b) \neq (2, -2)$. Przykłady przez nas skonstruowane mają $(a, b) = (\frac{n+3}{2}, -3)$.

Tablica 5.3: Wzory na pierwiastki proste stopnia n ze skręcenia Dehna t_c , gdy $N_{g+2} \setminus c = N_{g,2}$ oraz istnieją $g_0 \geq 1$, $m \geq 0$ takie, że $g = ng_0 + (n-1)m$.

g_0	m	Wzór na pierwiastek prosty stopnia n z t_c
$g_0 \geq 1$	$m \geq 1$ nieparzysta	<ul style="list-style-type: none"> • $(\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_2^{-1} \tau_1)^{\frac{n+1}{2}} t_c^{-1}$ • $(\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_2^{-1} \tau_1)^{\frac{n+1}{2}} t_c^{-1}$
Sygnatura	$(A, n, g_0, (2, 2); (-4, n), (4, n), (-4, n), \dots, (4, n), (-4, n))$	
$g_0 \geq 1$	$m \geq 0$ parzysta	<ul style="list-style-type: none"> • $(\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_2 \tau_1^{-1})^{\frac{n+1}{2}} t_c^{-1}$ • $(\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_2 \tau_1^{-1})^{\frac{n+1}{2}} t_c^{-1}$
Sygnatura	$(A, n, g_0, (2, -2); (-4, n), (4, n), (-4, n), \dots, (-4, n), (4, n))$	

Tablica 5.4: Wzory na pierwiastki proste stopnia n ze skręcenia Dehna t_c , gdy $N_{g+2} \setminus c = S_{g',2}$ oraz istnieją $g_0, m \geq 0$ takie, że $g' = ng_0 + \frac{m(n-1)}{2}$.

n	g_0	m	Wzór na pierwiastek prosty stopnia n z t_c
$n \geq 3$ nieparzysta	$g_0 \geq 0$	$m \geq 0$ parzysta	$(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \tau_m \tau_{m-1}^{-1} \tau_{m-2} \cdots \tau_2 \tau_1^{-1})^{\frac{n+1}{2}} t_c^{-1}$
Sygnatura	$(B, n, g_0, (2, -2); (-4, n), (4, n), (-4, n), \dots, (-4, n), (4, n))$		
$n \geq 3$ nieparzysta	$g_0 \geq 0$	$m \geq 3$ nieparzysta	$(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \theta_m \tau_{m-2}^{-1} \tau_{m-3} \tau_{m-4}^{-1} \cdots \tau_2 \tau_1^{-1})^{\frac{n+1}{2}} t_c^{-1}$
Sygnatura	$(B, n, g_0, (2, -2); (-2, n), (-2, n), (4, n), (-4, n), (4, n), \dots, (-4, n), (4, n))$		
$n = 3s + 1$ $s \geq 2$ parzysta	$g_0 \geq 0$	$m = 1$	$(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \zeta_1)^{s+1} t_c^{\frac{s}{2}}$
Sygnatura	$(B, n, g_0, (\frac{n+3}{2}, -3); (\frac{n+3}{2}, n))$		
$n = 3s + 2$ $s \geq 1$ nieparzysta	$g_0 \geq 0$	$m = 1$	$(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{g_0} \zeta_1)^{n-s} t_c^s$
Sygnatura	$(B, n, g_0, (\frac{n+3}{2}, -3); (\frac{n+3}{2}, n))$		

Spis rysunków

1.1	Ośmiokąt foremny jako model S_2	6
1.2	Sześciokąt foremny jako model N_3	6
1.3	Nierównoważne topologicznie okręgi dwustronne na powierzchni N_4	10
1.4	Generatory grupy podstawowej $\pi_1(S_{2,2}^3)$	12
1.5	Generatory grupy podstawowej $\pi_1(N_{3,2}^3)$	13
1.6	Generatory pierwszej grupy homologii $H_1(S_g)$	14
1.7	Generatory pierwszej grupy homologii $H_1(N_g)$	14
1.8	Algebraiczny indeks przecięcia pomiędzy klasami homologii a, b	15
1.9	Nakrycie $N_5 \rightarrow N_3$	19
1.10	Nakrycie $S_4 \rightarrow S_2$	20
1.11	Powierzchnia S_{g-1} jako podwójne nakrycie N_g	23
2.1	Łuki na wstędze Möbiusa.	29
2.2	Podnoszenie łuków ze wstęgi Möbiusa na nakrycie uniwersalne.	29
2.3	Skreślenie w pierścieniu w \mathbb{R}^2	30
2.4	Skreślenie Dehna wzdłuż okręgu dwustronnego.	31
2.5	Skreślenie Dehna na butelce Kleina z dziurą.	31
2.6	Jeżeli $i(a, b) = 1$, to $t_a t_b(a) = b$	34
2.7	Okręgi na $S_{1,3}$ definiujące relację gwiazdy.	35
2.8	Okręgi definiujące relację trójzębu.	36
2.9	Łuki λ_i oraz μ_i – dowód relacji trójzębu.	36
2.10	Okręgi nierozdzielające na S_g , wzdłuż których skreślenia Dehna generują $\mathcal{M}(S_g)$	37
2.11	Ślizg wstęgi Möbiusa M_2 wzdłuż okręgu dwustronnego a	38
2.12	Ślizg wstęgi Möbiusa.	39
2.13	Transpozycja wstęg Möbiusa.	39
2.14	Powierzchnia nieorientowalna rodzaju g	40

2.15	Przykładowy wybór $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g$ na powierzchni $N_{g,2}$ przedstawionej jako pierścień z wklejonymi g wstęgami Möbiusa.	41
2.16	Przykładowy wybór $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g$ na powierzchni $N_{g,2}$ przedstawionej jako suma spójna $S_{\frac{g-1}{2},2}$ z N_1	42
3.1	Dziesięciokąt foremny jako model powierzchni S_2	48
3.2	Dysk z lustrzanym brzegiem.	52
3.3	Dysk z lustrzanym brzegiem oraz pełnym 1-orbifoldem na brzegu	53
3.4	Dysk z dwoma lustrzanymi brzegami, punktem narożnym oraz pełnym 1-orbifoldem na brzegu	53
3.5	Dysk z dwoma lustrzanymi brzegami i dwoma punktami narożnymi.	54
3.6	Pętla α_x oraz podniesienie $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$ pętli α_x^n	59
3.7	Łuk γ_M oraz podniesienie β pętli $\beta_{(M,\gamma_M)}$	60
3.8	Łuki γ_M, γ_N oraz podniesienie $\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{2k}$ pętli $(\beta_{(M,\gamma_M)}\beta_{(N,\gamma_N)})^k$	60
3.9	Nakrycie dysku z czterema punktami stożkowymi torusem.	63
3.10	Inwolucja hipereliptyczna.	74
3.11	Nakrycia rozgałęzione $q_1 : S_{g,1} \rightarrow D_{2g+1}, q_2 : S_{g,2} \rightarrow D_{2g+2}$	74
3.12	Odwzorowanie indukowane przez skręcenie Dehna komutujące z involucją ρ	75
3.13	Obroty na dysku D_n	75
3.14	Łuki na A_{2g+1}	78
3.15	Obrót rzędu g na powierzchni $N_{g,2}$	78
3.16	Nakrycie rozgałęzione $q_3 : S_{g,3} \rightarrow A_{2g+1}$	79
4.1	Możliwe generatory $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ w przypadku B, gdy $m = 3$ i $g_0 = 2$	84
4.2	Możliwe generatory $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ w przypadku A gdy $m = 3$ i $g_0 = 3$	87
5.1	Rozkład $N_{g+2} \setminus c = N_{g,2}$ na $N_{n,2}^{(i)}$ i $S_{\frac{n-1}{2},2}^{(j)}$, $i = 1, \dots, g_0, j = 1, \dots, m$	110
5.2	Model powierzchni $N_{g+2} \setminus c = N_{g,2}$ dla $n = 3$	110
5.3	Model powierzchni $N_{g+2} \setminus c = N_{g,2}$ dla $n = 3$	114
5.4	Obrót rzędu g na N_g i odwzorowanie definiujące maksymalną relację trójzębu na N_g są sprzężone.	115
5.5	Okręgi a_i, b_i na powierzchni $N_{5,2}$	117
5.6	Rozkład $N_{g+2} \setminus c = S_{g',2}$ na $S_{n,2}^{(i)}$ i $S_{\frac{n-1}{2},2}^{(j)}$, $i = 1, \dots, g_0, j = 1, \dots, m$	118
5.7	Model powierzchni $N_{g+2} \setminus c = S_{g',2}$ dla $n = 3$	118
5.8	Odwzorowanie θ_j	119

Spis tablic

1.1	Typy topologiczne okręgów nierozdzielających na N_g	11
5.1	Podpowierzchnie $N_{g+2} \setminus c = N_{g,2}$	112
5.2	Podpowierzchnie $N_{g+2} \setminus c = S_{g',2}$	120
5.3	Wzory na pierwiastki proste stopnia n ze skręcenia Dehna t_c typu A.	123
5.4	Wzory na pierwiastki proste stopnia n ze skręcenia Dehna t_c typu B.	123

Lista symboli

$S_{g,n}^k$	powierzchnia orientowalna rodzaju g z n składowymi brzegu i k nakłuciami
$N_{g,n}^k$	powierzchnia nieorientowalna rodzaju g z n składowymi brzegu i k nakłuciami
S^2	sfera, to znaczy powierzchnia S_0
$\mathbb{R}P^2$	plaszczyzna rzutowa, to znaczy powierzchnia N_1
D_n	dysk z n punktami stożkowymi
A_n	pierścień z n punktami stożkowymi
$\chi(X)$	charakterystyka Eulera rozmaitości X
$\chi^{orb}(X)$	orbifoldowa charakterystyka Eulera orbifoldu X
$\pi_1(X, p)$	grupa podstawowa przestrzeni topologicznej X z punktem bazowym p
$\pi_1(X)$	grupa podstawowa przestrzeni topologicznej X
$\pi_1^{orb}(X)$	orbifoldowa grupa podstawowa orbifoldu X
$H_1(X; \mathbb{Z})$	pierwsza grupa homologii przestrzeni topologicznej X o współczynnikach z \mathbb{Z}
$\mathcal{M}(X)$	grupa klas odwzorowań powierzchni X
σ_i	elementarna operacja warkoczy
t_a	skręcenie Dehna względem okręgu a
u_i	transpozycja wstęg Möbiusa
y_i	ślizg wstęgi Möbiusa
C_n	grupa cykliczna rzędu n
$[a, b]$	komutator $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$
$[G, G]$	komutant $[G, G] = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle$
$\text{nwd}(a, b)$	największy wspólny dzielnik liczb a i b
$f \simeq g$	homotopijność/izotopijność odwzorowań f i g
$f \simeq g \text{ rel}\{0, 1\}$	homotopijność ścieżek f i g
$G \cong H$	izomorfizm grup G i H
$X \approx Y$	homeomorficzność przestrzeni topologicznych X, Y

Oznaczenia z dowodu Twierdzenia 4.1.1 i konstrukcji geometrycznych

- c okrąg dwustronny na powierzchni N_{g+2}
- U_c otoczenie regularne okręgu c
- n stopień pierwiastka ze skręcenia Dehna t_c
- h pierwiastek stopnia n z t_c , $h \in \mathcal{M}(N_{g+2})$
- c_1, c_2 dwie składowe brzegu powierzchni $N_{g+2} \setminus c$
- F powierzchnia powstała z $N_{g+2} \setminus c$ przez zaklejenie składowych brzegu c_1, c_2 dyskami (homeomorficzna z N_g lub $S_{\frac{g}{2}}$)
- t indukowany przez pierwiastek $h \in \mathcal{M}(N_{g+2})$ homeomorfizm $t \in \text{Homeo}(F)$
- \mathcal{O} orbifold $F / \langle t \rangle$
- g_0 rodzaj topologiczny orbifolderu \mathcal{O}
- P, Q dwa wyróżnione punkty stałe odwzorowania t na F znajdujące się wewnątrz dysków ograniczonych przez c_1, c_2
- $m + 2$ liczba punktów stożkowych orbifolderu \mathcal{O}
- $\{X_j^e\}$ punkty stałe odwzorowania $t^{\frac{n}{n_j}}$ należące do jednej orbity przy działaniu $\langle t \rangle$, gdzie n_j jest dzielnikiem n , $j = 1, 2, \dots, m$, $e = 1, 2, \dots, \frac{n}{n_j}$
- p, q, x_j punkty stożkowe stopni n, n, n_j odpowiednio będące obrazami punktów $P, Q, \{X_j^e\}$, $j = 1, 2, \dots, m$ przy nakryciu orbifoldowym $F \rightarrow \mathcal{O}$
- φ epimorfizm $\varphi : \pi_1^{orb} \mathcal{O} \rightarrow \langle t \rangle$ z krótkiego ciągu dokładnego indukowanego przez nakrycie orbifoldowe $F \rightarrow \mathcal{O}$
- $\frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi l}{n}$ lokalne kąty obrotu wokół punktów P, Q przy działaniu t
- a, b odwrotności k, l w \mathbb{Z}_n odpowiednio
- $\frac{2\pi y_j}{n_j}$ lokalne kąty obrotu wokół punktów $\{X_j^e\}$ przy działaniu $t^{\frac{n}{n_j}}$
- c_j odwrotność y_j w \mathbb{Z}_{n_j}

Bibliografia

- [1] M. A. ARMSTRONG, *The fundamental group of the orbit space of a discontinuous group*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 64 (1968), str. 299–301.
- [2] J. S. BIRMAN, *Mapping class groups and their relationship to braid group*, Comm. Pure Appl. Math., 22 (1969), str. 213–238.
- [3] J. S. BIRMAN, *Abelian quotients of the mapping class group of a 2-manifold*, Bull. Amer. Math. Soc., 76 (1970), str. 147–150.
- [4] J. S. BIRMAN, *Braids and Links and Mapping Class Groups*, no. 82 in Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1974.
- [5] J. S. BIRMAN, D. R. J. CHILLINGWORTH, *On the homeotopy group of a non-orientable surface*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 71 (1972), str. 437–448.
- [6] J. S. BIRMAN, H. M. HILDEN, *On mapping class groups of closed surfaces as covering spaces*, in Advances In the theory of Riemann surfaces, no. 66 in Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1971, str. 81–115. Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969.
- [7] J. S. BIRMAN, H. M. HILDEN, *On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces.*, Ann. of Math., 97 (1973), str. 424–439.
- [8] J. S. BIRMAN, H. M. HILDEN, *Erratum to 'On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces.'*, Ann. of Math., 185 (2017), str. 345.
- [9] M. BOILEAU, S. MAILLOT, J. PORTI, *Three-Dimensional Orbifolds and their Geometric Structures*, No. 15 in Panoramas et Synthèses, Société Mathématique de France, 2003. Dostępne na <http://mat.uab.es/~porti/main.pdf>.
- [10] E. BUJALANCE, F. CIRRE, J. GAMBOA, G. GROMADZKI, *Symmetries of compact Riemann surfaces*, Lecture Notes In Mathematics, Springer-Verlag, 2007.
- [11] S. CHOI, W. M. GOLDMAN, *The Deformation Spaces of Convex $\mathbb{R}P^2$ -Structures on 2-Orbifolds*, American Journal of Mathematics, 127 (2005), str. 1019–1102.
- [12] M. W. DAVIS, *Lectures on orbifolds and reflection groups*. Dostępne na <https://people.math.osu.edu/davis.12/papers/lectures%20on%20orbifolds.pdf>.

-
- [13] M. DEHN, *Die Gruppe der Abbildungsklassen*, Acta Math., 69 (1938), str. 135–206.
- [14] M. DEHN, *Papers in group theory and topology*, Springer-Verlag, 1987. Translated and Introduced by John Stillwell.
- [15] R. DUDA, *Wprowadzenie do topologii*, Tom 47, Biblioteka Matematyczna, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1986.
- [16] D. B. A. EPSTEIN, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math., 115 (1966), str. 83–107.
- [17] C. L. EZELL, *Branch point structure of covering maps onto nonorientable surfaces*, Transactions of the American Mathematical Society, 243 (1978), str. 123–133.
- [18] B. FARB, N. V. IVANOV, *The Torelli geometry and its applications*, Math. Res. Lett., 12 (2005), str. 293–301.
- [19] B. FARB, D. MARGALIT, *A Primer on Mapping Class Groups*, vol. 49 of Princeton Mathematical Series, Princeton Univ. Press, 2011.
- [20] O. FORSTER, *Lectures on Riemann Surfaces*, vol. 81 of Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1981.
- [21] S. GADGIL, D. PANCHOLI, *Homeomorphisms and the homology of non-orientable surfaces*, Proc. Indian Acad. Sci., 115 (2005), str. 251–257.
- [22] J. GALLIER, D. XU, *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*, vol. 9 of Geometry and Computing, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [23] S. GERVAIS, *A finite presentation of the mapping class group of a punctured surface*, Topology, 40 (2001), str. 703–725.
- [24] T. GHASWALA, R. R. WINARSKI, *Lifting homeomorphisms and cyclic branched covers of spheres*. arXiv:1607.06060. Ukaże się w Michigan Mathematical Journal, 2017.
- [25] J. L. HARER, *The second homology group of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math., 72 (1983), str. 221–239.
- [26] J. L. HARER, *Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces*, Ann. of Math., 121 (1985), str. 215–249.
- [27] J. L. HARER, *The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math., 84 (1986), str. 157–176.
- [28] W. J. HARVEY, *Geometric structure of surface mapping class groups*, in Homological Group Theory, vol. 36 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, 1979, str. 255–270.
- [29] A. HATCHER, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002. Dostępna na <https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>.

- [30] S. P. HUMPHRIES, *Generators for the mapping class group*, in *Topology of Low-Dimensional Manifolds*, vol. 722 of *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, 1979, str. 44–47. Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977.
- [31] N. V. IVANOV, J. D. MCCARTHY, *On injective homomorphisms between Teichmüller modular groups I*, *Invent. Math.*, 135 (1999), str. 425–486.
- [32] D. L. JOHNSON, *Homeomorphisms of a surface which act trivially on homology*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 75 (1979), str. 119–125.
- [33] D. L. JOHNSON, *An abelian quotient of the mapping class group \mathcal{I}_g* , *Mathematische Annalen*, 249 (1980), str. 225–242.
- [34] D. L. JOHNSON, *Conjugacy Relations in Subgroups of the Mapping Class Group and a Group-Theoretic Description of the Rochlin Invariant*, *Mathematische Annalen*, 249 (1980), str. 243–264.
- [35] D. L. JOHNSON, *The structure of the Torelli group I: A finite set of generators for \mathcal{I}* , *Ann. of Math.*, 118 (1983), str. 423–442.
- [36] S. P. KERCKHOFF, *The Nielsen realization problem*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2 (1980), str. 452–454.
- [37] S. P. KERCKHOFF, *The Nielsen realization problem*, *Ann. of Math.*, 117 (1983), pp. 235–265.
- [38] J. M. LEE, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, vol. 176 of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag New York, 1997.
- [39] M. LEŚNIAK, B. SZEPIETOWSKI, *Generating the mapping class group of a nonorientable surface by crosscap transpositions*. arXiv:1703.03611 [math.GT], 2017.
- [40] W. B. R. LICKORISH, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, *Ann. of Math.*, 76 (1962), str. 531–540.
- [41] W. B. R. LICKORISH, *Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 59 (1963), str. 307–317.
- [42] W. B. R. LICKORISH, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 60 (1964), str. 769–778.
- [43] W. B. R. LICKORISH, *Homeomorphisms of non-orientable surfaces*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 61 (1965), str. 61–64.
- [44] W. MAGNUS, A. KARRASS, D. SOLITAR, *Combinatorial group theory*, Dover Publications, 1976. Second revised edition.
- [45] D. MARGALIT, S. SCHLEIMER, *Dehn twists have roots*, *Geometry & Topology*, 13 (2009), str. 1495–1497.

- [46] D. McCULLOUGH, K. RAJEEVSARATHY, *Roots of Dehn twists*, *Geom. Dedicata*, 151 (2011), str. 397–409.
- [47] N. MONDEN, *On roots of Dehn twists*, *Rocky Mountain J. Math.*, 44 (2014), str. 987–1001.
- [48] D. MUMFORD, *Abelian quotients of the Teichmüller modular group*, *J. Analyse Math.*, 18 (1967), str. 227–244.
- [49] M. H. A. NEWMAN, *A theorem on periodic transformations of spaces*, *Quart. J. Math. Oxford*, 2 (1931), str. 1–8.
- [50] J. NIELSEN, *Untersuchungen zur Theorie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I*, *Acta Math.*, 50 (1927), str. 189–358.
- [51] J. NIELSEN, *Untersuchungen zur Theorie der geschlossenen zweiseitigen Flächen II*, *Acta Math.*, 53 (1929), str. 1–76.
- [52] J. NIELSEN, *Untersuchungen zur Theorie der geschlossenen zweiseitigen Flächen III*, *Acta Math.*, 58 (1932), str. 87–167.
- [53] L. PARIS, *Mapping class groups of non-orientable surfaces for beginners*. arXiv:1410.1123v1 [math.GT], 2014.
- [54] L. PARIS, DALE ROLFSEN, *Geometric subgroups of mapping class groups*, *J. Reine Angew. Math.*, (2000), str. 47–83.
- [55] L. PARIS, B. SZEPIETOWSKI, *A presentation for the mapping class group of a nonorientable surface*, *Bull. Soc. Math. France.*, 143 (2015), str. 503–566.
- [56] A. PARLAK, M. STUKOW, *Roots of crosscap slides and crosscap transpositions*. arXiv:1601.06096 [math.GT], 2016. Ukaże się w *Periodica Mathematica Hungarica*.
- [57] A. PARLAK, M. STUKOW, *Roots of Dehn twists on nonorientable surfaces*. arXiv:1701.00531 [math.GT], 2017.
- [58] A. PARSHIN, I. SHAFAREVICH, *Algebra VII: Combinatorial Group Theory: Applications to Geometry*, *Algebra/ A.I. Kostrikin ; I.R. Shafarevich*, Springer Berlin Heidelberg, 1993.
- [59] U. PINKAL, J. D. MCCARTHY, *Representing homology automorphisms of nonorientable surfaces*. Max Planck Inst. preprint MPI/SFB 85-11. Dostępne na <http://www.math.msu.edu/~mccarthy>, 2004.
- [60] K. RAJEEVSARATHY, *Roots of Dehn twists about separating curves*, *Journal of Australian Mathematical Society*, 95 (2013), str. 266–288.
- [61] K. RAJEEVSARATHY, *Fractional powers of Dehn twists about nonseparating curves*, *Glasgow Mathematical Journal*, 56 (2014), str. 197–210.
- [62] K. RAJEEVSARATHY, P. VAIDYANATHAN, *Roots of Dehn twists about multicurves*. arXiv:1506.01534 [math.GT], 2015.

- [63] M. STUKOW, *Dehn twists on nonorientable surfaces*, Fund. Math., 189 (2006), str. 117–147.
- [64] M. STUKOW, *Commensurability of geometric subgroups of mapping class groups*, Geom. Dedicata, 143 (2009), str. 117–142.
- [65] M. STUKOW, *A finite presentation for the hyperelliptic mapping class group of a nonorientable surface*, Osaka J. Math., 52 (2015), str. 495–515.
- [66] W. P. THURSTON, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Notes from Princeton University, Stony Brook. Dostępne na <http://library.msri.org/books/gt3m>, 1976.
- [67] O. VIRO, *1-manifolds*, Bulletin of the Manifold Atlas, (2013).
- [68] B. WAJNRYB, *A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface*, Israel J. Math., 45 (1983), str. 157–174.
- [69] B. WAJNRYB, *Mapping class group of a surface ands generated by two elements*, Topology, 35 (1996), str. 377–383.
- [70] B. WAJNRYB, *Relations in the mapping class group*, in Problems on Mapping Class Groups and Related Topics, vol. 74, 2006, str. 115–120. Proceedings of Symposia andn Pure Mathematics.
- [71] D. R. WILKINS, *Course 421: Algebraic Topology*. Notatki z Trinity College, Dublin. Dostępne na <http://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/421/>, 2008.